ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA

ARGENTINA

Director : Ingeniero JULIO R. CASTIÑEIRAS

TOMO XCIII

Primer semestre de 1922

BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA « CONI »
684, PERÚ. 684

1922

LOS AXIOMAS DE LA GEOMETRÍA

Por JORGE DUCLOUT

PREFACIO

Hace diez años, de agosto a octubre de 1911, dí en la Facultad de Ciencias exactas, físicas y naturales de esta Capital, una serie de conferencias sobre *Los axiomas de la Geometría.* El tema no ha perdido su actualidad desde entonces, cuando daba lugar a polémicas importantes entre Poincaré e Hilbert y sus partidarios, sabios y filósofos. Poincaré ha desaparecido; pero la discusión sobre los axiomas, como puntos de partida de una ciencia lógica, no ha cesado, y como encuentro que mis conferencias exponen bien hoy todavía una teoría elemental de estas cuestiones, me he decidido a publicarlas.

Quien haya leído en estos *Anales de la Sociedad Científica Argentina* (año 1893) mis *Fundamentos de la Geometría,* extrañará quizá la modificación total de los modos de ver de entonces. Han cambiado los puntos de vista. Antes se buscaba una coincidencia, lo más estricta posible, entre nuestra intuición empírica de los fenómenos naturales y la ciencia que se estudiaba. Hilbert y los logísticos nos probaron, y lo admitimos, que los axiomas son « *hipótesis mentales elegidas más o menos arbitrariamente* », que sólo deben satisfacer el principio de *no contradicción,* y ser tomados en un número estrictamente necesario y suficiente para el objeto propuesto. Con ellos se puede edificar una « ciencia formal » aplicando la lógica. Toda « ciencia exacta » sólo puede ser una tal ciencia « formal »; su adaptación a la experiencia o a fenómenos cuyas leyes sigan sus mismas reglas lógicas, será siem-

pre aproximada. El progreso científico no consiste en edificar ciencias naturales exactas en sí, que no existen, sino, en simplificar aquel mecanismo formal-lógico, en buscar una aproximación cada día más minuciosa entre sus resultados y la observación, y una explicación siempre más clara y breve de un ciclo de fenómenos cada vez más extenso.

La ciencia no sólo debe ser como quiere Mach, un aparato «economizador de pensamiento», sino que debe penetrar siempre más en el detalle de fenómenos cada vez más complejos. Admirable ejemplo de ello son *Los axiomas de la Geometría* de Hilbert, de cuya teoría tratan de dar una idea elemental las páginas siguientes.

Debo expresar mi agradecimiento al señor profesor ingeniero Emilio Rebuelto, quien reconstituyó las conferencias sobre la base de mis breves apuntes, al profesor ingeniero R. Sortini, que pasó en limpio todo el texto y las figuras, y al señor doctor B. Ig. Baidaff, por la revisión de pruebas.

Buenos Aires, agosto de 1921.

CAPÍTULO I

Prólogo histórico

El estudio crítico de los fundamentos de la geometría ha preocupado a los matemáticos y filósofos de todos los siglos. Sin pretensión de hacer una reseña histórica de cómo han evolucionado las ideas de los sabios sobre este punto, recordaremos brevemente algunos detalles.

En sus orígenes — indios o egipcios — la geometría era una mezcla de enunciados y reglas prácticas, de origen experimental: muchas de ellas empíricas, otras, las menos, racionales; aparecía mezclado lo *exacto* con lo *aproximado*, sin distinción de ninguna clase. Como ejemplo típico puede citarse el cálculo del área del triángulo isósceles, que según los egipcios — *papiro de Ahmes* — era igual al producto de la base por la mitad del lado. Ver para más detalles la obra de A. Eisenlohr, *Ein mathematisches Handbuch der alten Egypter*, Leipzig, 1877.

Parece indudable que de Egipto la geometría pasó a Grecia, donde el genio helénico dió a aquel conjunto inarmónico y desarticulado de

conocimientos, la trabazón y el alma que le faltaba. En Grecia se formó un cuerpo de doctrina razonado y metódico, con lo que había sido hasta entonces una mezcla confusa de reglas aplicables a los trabajos topográficos de los agrimensores egipcios: las proposiciones sueltas y aisladas fueron objeto de una clasificación, y deducidas una de otra.

El hombre que aparece ligado a esta gran obra es Euclides, que vivió en Alejandría, 300 años antes de Jesucristo, bajo el reinado de Tolomeo I. En sus obras se distinguen y diferencian ya las *definiciones,* los *postulados,* los *axiomas* y las *proposiciones a demostrar.* Los *Elementos de Euclides* han sido durante veinte siglos la piedra fundamental de esta ciencia.

Entre las nociones primitivas no demostradas, que eligió Euclides como punto de partida, figura su famoso postulado que se enuncia hoy generalmente diciendo, que por un punto de un plano pasa una sola paralela a cada recta del mismo, y en cuya demostración se han empeñado vanamente los más famosos geómetras. Un libro, en el que están reunidos numerosos detalles sobre este punto especial de la historia de las matemáticas, desde su origen hasta nuestros días, es la obra de Stäckel und Engel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauss* (Leipzig, 1895).

Los trabajos de Euclides fueron continuados por una brillante serie de geómetras ilustres, como Arquímedes (250 antes de J. C.), Apolonio (250 antes de J. C.), Gémino (70 antes de J. C.), Nichomacus (100 después de J. C.), Papus (III siglo) y Proclus (V siglo), que ampliaron los conocimientos de detalle sobre las figuras geométricas, dentro del sistema de conceptos fundamentales que había concretado Euclides.

En el siglo VI, la caída del imperio romano de Occidente, junto con el marasmo intelectual que el misticismo cristiano hizo imperar en Europa, produjo un abandono completo de los estudios geométricos, un olvido total de lo que se conocía; en resumen, un retroceso que hizo volver a las primitivas ideas de los egipcios.

Los árabes, en los siglos X al XII, cultivaron brillantemente toda clase de estudios científicos y prepararon el renacimiento occidental de las disciplinas científicas. Los antiguos códices de los geómetras griegos, especialmente de Euclides, habían sido traducidos al árabe, y en 1482 se tradujeron del árabe al latín y al griego, siendo así conocidos en Europa.

La primera edición griega de los *Elementos de Euclides* fué publicada en 1533 por Simón Grynæus; er aquella época, estaban ya or-

ganizadas la mayor parte de las universidades europeas y en todas ellas se tomaron los *Elementos* como base de la enseñanza geométrica.

La falta de una demostración para el postulado, debió parecer a los matemáticos una laguna que era necesario llenar y en esta dirección encaminaron sus esfuerzos. Entre los primeros debe mencionarse Nasr Edin (1201-1274), geómetra persa que escribió en árabe, al cual siguieron autores de menor importancia, y en el siglo XVI, Clavius (1537-1612), que comentó los trabajos de Proclus. El jesuíta Saccheri (1667-1733) fué autor de un curioso libro, *Euclides ab omnia naevo vindicatus,* obra muy original y en la que se examina ya la posibilidad de la existencia de otros sistemas de geometría en que el postulado no sea cierto, y Lambert (1728-1777) con su trabajo *Theorie der Parallellinien.*

Entre Euclides y Lambert habían transcurrido 2000 años; los conocimientos geométricos habían adelantado muchísimo, pero el análisis lógico de los fundamentos, la crítica de los conceptos fundamentales, *continuaban en vigor* siendo los mismos que en los tiempos de Euclides y el fracaso absoluto de todas las tentativas hechas para demostrar el famoso postulado no había servido más que para probar cuán grande fué la sagacidad y clarovidencia de Euclides al elegir sus nociones fundamentales: pero los inmensos trabajos hechos, si bien no aclaraban el misterio, empezaron a mostrar cuál debía ser el camino para que la solución fuese alcanzada. Al fin del siglo XVIII dice un autor, — el descubrimiento de la geometría *no-euclidea* (palabra debida a Gauss) era inevitable.

Uno de los que iniciaron las investigaciones en la dirección necesaria, apartándose de las tendencias anteriores, que buscaban una demostración para el postulado, fué K. F. Gauss (1777-1855), que en 1799 llegó a dudar de su demostrabilidad, lo que era, evidentemente, el primer paso necesario para cambiar de rumbo; en 1816 había encontrado ya los fundamentos de la geometría hiperbólica, y lo mismo que él F. K. Schweikart (1780-1859) de Marburgo, en 1818; pero ninguno de los dos se atrevió a publicar nada. Estos trabajos han sido publicados después en el volumen 8° de las *Obras completas* de Gauss.

Las investigaciones de Lobachevski (1795-1856), expuestas en la conferencia dada el 12 de febrero de 1826 en la Universidad de Kazan, y las de J. Bolyai (1802-1860), insertas en un apéndice a la geometría de su padre Wolfgang Bolyai de Bolya, publicada en 1832 y que lo inmortalizan, originan la divulgación de estas ideas, que en-

traron inmediatamente a formar parte del caudal de los conocimientos geométricos. Fueron ampliamente discutidos y comentados, creándose para la rama de las matemáticas que con ellos se formaba, la palabra « Metageometría », análoga en su primitivo significado a la de « Metafísica ».

A partir de estas fechas, la nueva dirección impresa al estudio del postulado de Euclides fué seguida por muchos geómetras, que encontraron en ella un medio para ampliar extraordinariamente los conceptos fundamentales de la geometría. Helmholtz (1821-1894), Hoüel (1823-1886), Riemann (1826-1866), Beltrami (1835-1900), Klein (1849), Poincaré (1854-1912) inmortalizaron su nombre con las investigaciones que llevaron a cabo en este género de estudios, y el prodigioso genio Sophus Lie (1842-1899) amplió aún más, en el dominio analítico, los resultados de sus predecesores.

Dentro de estos estudios, se ha llegado a conceptos incomprensibles antes con la vieja teoría geométrica, que no admitía más hipótesis posible que la euclidea : tales son, para no citar más que un grupo de ellos, los derivados de la « curvatura del espacio ».

Bien pronto el campo de estudio fué tan grande, que hubo lugar para subdivirse en escuelas y sistemas. Un conjunto notable de matemáticos inició el estudio crítico, más bien dicho *criteriológico,* de las nociones fundamentales del *punto,* la *línea* y la *superficie.* Las definiciones que de estos elementos existen, son todas incorrectas, como es fácil verlo con un pequeño análisis, y las nociones a que responden estas ideas están, por su vaguedad y confusión, de perfecto acuerdo con las definiciones que de ellos se hacen. La escuela moderna, a que debemos hoy el conocer algo más preciso sobre estos puntos fundamentales de la geometría, fué iniciada por Grassmann, Veronese, Peano, Pieri y Enriques, los cuatro últimos italianos. Los trabajos de estos sabios se dirigieron principalmente a reducir las bases de la geometría a un conjunto de axiomas lógicos, independizándola de las definiciones.

El matemático alemán doctor David Hilbert (Göttingen) reunió todo en un admirable libro : *Grundlagen der Geometrie* (1899). La segunda edición de este libro se publicó en Leipzig en 1903, y la tercera en 1909. Existe una traducción francesa de la primera edición alemana por Laugel, publicada en Paris, 1900.

Finalmente, tres matemáticos alemanes, Heinrich Weber, Joseph Wellstein y Walter Jacobstahl, han desarrollado de mano maestra este tema en el volumen II de su *Encyklopädie der elementaren Geome-*

trie, publicada en Leipzig, en 1907. Sigo de cerca a Wellstein *(Enciclopedia de matemáticas elementales,* Teubner, Leipzig), dando con mayor detalle muchos temas poco estudiados entre nosotros.

Los fundamentos de estas teorías pueden resumirse en pocas palabras: se trata de crear una ciencia *lógica,* y como tal, independiente de la naturaleza de los objetos que estudia; pueden ser estos : puntos, rectas, planos o cualquier otro *ente* lógico, dentro de las restricciones que le imponen la clase de raciocinios con que los vinculamos entre sí, y por lo tanto, independiente de toda definición.

Las ventajas de esta manera de formar la ciencia geométrica son muchas y muy importantes; desde el punto de vista filosófico (sobre todo lógico) el campo de investigaciones queda ampliado enormemente, a la vez que se simplifican las aplicaciones; desde el punto de vista matemático, se obtiene un gran número de nuevos teoremas y propiedades que resultan evidentes de por sí, y cuya generalización permite descubrir la existencia de muchos otros, no sospechados hasta ahora. El interés científico y pedagógico, que esto representa como economía de tiempo y trabajo no puede tampoco pasar desapercibido.

La modificación que estas ideas deben traer en el campo de la enseñanza matemática, y en el de las aplicaciones prácticas de la ciencia, ha de ser fundamental, y no ha de pasar mucho tiempo sin que comencemos a sentir sus benéficos resultados.

CAPÍTULO II

Los axiomas de Hilbert

Hilbert trata de establecer la geometría sobre un sistema *simple* y *completo* de axiomas independientes entre sí; para ello, comienza por hacer la convención siguiente :

Consideremos tres diferentes sistemas de entes : los del primer sistema, los llamaremos *puntos* y los designaremos con las letras A, B, C, ... ; los del segundo, los llamaremos *rectas* y los designaremos por $a, b, c, \ldots$ y finalmente, los del tercero, los llamaremos *planos* y los designaremos por $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$

Estos puntos, rectas y planos tendrán entre ellos ciertas relaciones mútuas que expresaremos con las palabras « están situados en » ; « en-

tre» ; « paralela » ; « congruente » ; « continuo » etc. La descripción exacta y completa de estas relaciones, tiene lugar por intermedio de los *axiomas de la geometría*.

Estos axiomas los dividiremos en cinco grupos; en algunos de ellos distinguiremos también una subdivisión entre axiomas del plano y del espacio.

PRIMER GRUPO DE AXIOMAS : AXIOMAS DE VINCULACIÓN (Ó ASOCIACIÓN)

a) En el plano :

I_1. Dos puntos distintos, A y B, definen siempre *una* recta a; y escribiremos $AB = a$ o $BA = a$;

I_2. Dos puntos distintos cualesquiera en una recta, definen *esta misma recta :* es decir que si $AB = a$, y $AC = a$ y $B \neq C$, se tiene también $BC = a$;

I_3. En toda recta hay siempre por lo menos dos puntos, y en todo plano hay siempre por lo menos tres puntos que no están en la misma recta.

b) En el espacio :

I_4. Tres puntos A, B, C, no situados en una misma recta, definen siempre un plano α; y escribiremos : $ABC = \alpha$;

I_5. Tres puntos distintos cualesquiera de un mismo plano α, que no están situados en una misma recta, definen el *mismo plano* α : es decir que si $ABC = \alpha$ y $ABD = \alpha$, y $ABD \neq a_1$, $C \neq D$ y $BCD \neq a_2$ es $BCD = \alpha$;

I_6. Si dos puntos A y B de una recta a están en un plano α, todos los puntos de a están en el plano α;

I_7. Si dos planos α y β tienen un punto común A, deben tener por lo menos otro punto común B ;

I_8. Existen por lo menos cuatro puntos que no están situados en el mismo plano.

Entre las muchas consecuencias que se deducen de los axiomas anteriores, citaremos como más importantes las siguientes :

Dos rectas en un plano se cortan en un solo punto;

Dos planos en el espacio se cortan en una sola recta;

Una recta y un plano se cortan en un solo punto;

Por una recta y un punto no situado en ella, se puede siempre hacer pasar un plano;

Por dos rectas que se cortan se puede siempre hacer pasar un plano.

SEGUNDO GRUPO DE AXIOMAS : AXIOMAS DE DISTRIBUCIÓN (U ORDENACIÓN)

Los axiomas de este grupo definen la idea expresada por la palabra *entre,* y permiten efectuar la *distribución* de los puntos en una recta, en el plano o en el espacio : admitiremos como convención que los puntos de una recta tienen entre ellos una cierta relación que se expresa con la palabra *entre.*



Fig. 1

II_1. Sean A, B, C, tres puntos de una recta : si B está *entre* A y C, está también entre C y A (fig. 1).

II_2. Sean A y C dos puntos de una recta : hay siempre por lo menos un punto B entre A y C y por lo menos también un punto D, tal que C está *entre* A y D (fig. 2).

II_3. Dados tres puntos cualesquiera de una recta, hay siempre uno y uno solo de ellos que se encuentra entre los otros dos (fig. 3).



Fig. 2

Aclaración. — Consideremos dos puntos A y B, sobre una recta a : determinan un conjunto de puntos al que llamaremos *segmento,* y lo designaremos con $\overline{AB}$ o con $\overline{BA}$. Los puntos situados *entre* A y B serán los puntos *del* segmento AB o situados *en,* o *adentro de,* o en el *interior de* $\overline{AB}$: los dos puntos A y B serán los *terminales* o *extremidades* del segmento $\overline{AB}$. Todos los demás puntos de la recta a los llamaremos : situados *fuera del* segmento AB.

Podremos enunciar ahora el siguiente axioma :

II_4. Sean A, B, C tres puntos no situados en una misma línea recta y a una recta del plano ABC, que no contenga ninguno de los puntos A, B y C ; en tal caso, si la recta a pasa por un punto del segmento $\overline{AB}$, pasará también, sea por un punto del segmento AC o por uno del segmento BC (fig. 4).



Fig. 3

Los axiomas II_1, II_2 y II_3, hablan puramente de puntos de una recta y por eso se llaman axiomas lineales del grupo II ; pero el II_4 considera los puntos del plano y constituye el axioma plano del grupo II.

De entre las muchas consecuencias que pueden deducirse de estos axiomas, mencionaremos los siguientes :

Teorema. — Entre dos puntos de una recta hay un número ilimitado de puntos.

Teorema. — Dados cuatro puntos sobre una recta siempre se podrán designar con las letras A, B, C y D, de tal modo que B se encuentre entre A y C, C entre A y D y también entre B y D. Para demostrarlo habría que aplicar los axiomas II_1 y II_2.

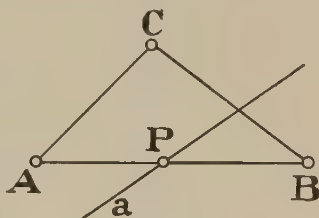


Fig. 4

Teorema. — Dado un cierto número limitado de puntos de una recta, siempre se pueden designar de tal modo, con las letras A, B, C, D ... K, que B se encuentre entre A y los demás puntos; C entre A, B por una parte y D, E, ..., K, por la otra, etc. La designación inversa, K, ..., D, C, B, A, goza de la misma propiedad, y estas dos son las únicas posibles. Este teorema es una generalización del anterior.

Teorema. — Si ABC no son colineales, cualquier recta que tiene un punto F sobre el segmento AC y un punto G sobre el segmento AB, no puede tener otro sobre el segmento BC.

Teorema. — Cada recta *a* de un plano α, lo divide en dos regiones tales que : cada punto A de una de ellas determina, con otro B de la otra, un segmento AB en el cual hay un punto de *a ;* y por el contrario dos puntos A y A′ de la misma región definen un segmento sin punto común con *a*.

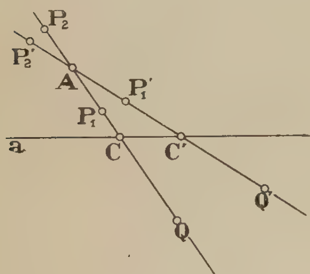


Fig. 5

Para demostrar el teorema, se tomará un punto C sobre *a,* y basándose en el axioma II_2 se establecerá la existencia de puntos Q (fig. 5) tales que C esté entre A y Q : estos puntos Q correspondientes a los varios C de la *a* forman una de las regiones. Por el mismo axioma, se establecerá la existencia de puntos P tales que P esté entre A y C, o A entre P y C : estos puntos forman la otra región.

Se aplicará luego el teorema anterior y el axioma II_4 y se demostrará que los segmentos determinados por dos puntos P o por dos puntos Q, no tienen puntos comunes con *a,* pero en cambio sí los segmentos determinados por un punto P y un punto Q.

Las nociones anteriores pueden aclararse con la siguiente observación.

Sean A, A′, O y B, cuatro puntos situados sobre una recta *a* y tales que O (fig. 6) esté situado entre A y B, pero no entre A y A′; podremos decir entonces que A y A′ están en la recta *a*, *de un mismo lado* de O y que A y B están de *lados distintos,* siempre con relación al punto O. El conjunto de los puntos de una recta *a* situado de un mismo lado de un punto O, lo llamaremos una *semirecta* o un *semirayo,* salido de O, y diremos que cada punto de una recta la divide en dos *semirectas.*

Análogamente, podremos decir que la recta *a* del teorema anterior divide al plano en dos partes, que están de distintos *lados* de la recta, o sea en dos *semiplanos.*

Un sistema de segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, ..., $\overline{KL}$, que una los puntos A y L de un plano α, lo definiremos diciendo que es una *línea quebrada,* y por abreviar la designaremos con ABCD ... KL y todos los puntos que están en estos segmentos los llamaremos puntos de la línea quebrada. En particular, si el punto L, coincide con A, la línea quebrada será cerrada y la llamaremos *polígono,* del cual los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, CD, ..., serán *lados* y los puntos A, B, C, ..., K, L, *vértices.*

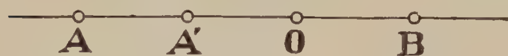


Fig. 6

A estos polígonos se les puede dar diferentes denominaciones, según el número de lados *(triángulos, cuadriláteros, pentágonos, n-gonos).*

Cuando los vértices del polígono son todos distintos, cuando ningún vértice cae sobre un lado y cuando además dos lados cualesquiera no consecutivos no tienen ningún punto común, el polígono se llama *simple.*

Podemos extender las nociones anteriores y deducir del último teorema demostrado, el siguiente :

Todo polígono simple cuyos vértices están todos situados en un mismo plano α, divide a todos los puntos del plano que no pertenecen a la línea quebrada que forma el polígono, en dos regiones, una interior y otra exterior que gozan de las propiedades siguientes :

Si A es un punto de la región interior y B uno de la exterior, toda línea quebrada que una A con B tiene por lo menos un punto común con el polígono; por el contrario, si A y A′ son puntos ambos interiores, o B y B′ puntos ambos exteriores, existen siempre en el plano α quebradas que los unen respectivamente sin tener ningún punto co-

mún con el polígono. Existen rectas que están todas enteras, por decirlo así, en el exterior del polígono, pero no existe ninguna que esté toda contenida en el interior del polígono.

Siempre en el mismo orden de ideas, se puede decir que todo plano α divide los puntos del espacio en dos regiones, con la propiedad siguiente : Todo punto A de una de ellas, determina por su unión con todo punto B de la otra un segmento AB que contiene un punto del plano α; por el contrario, dos puntos cualesquiera A y A′ de una misma región, determinan siempre un segmento AA′ que no encierra ningún punto de α.

Haciendo las mismas convenciones que en los casos anteriores, diremos que los puntos A y A′ están situados en el espacio *de un mismo lado* del plano α y los puntos A y B en *lados diferentes del plano* α.

Estos últimos enunciados expresan las verdades más importantes relativas a la distribución de los elementos en el *espacio*. Como se ha visto, estas verdades dependen exclusivamente de los axiomas considerados hasta aquí, o sea de *asociación* y *distribución*, sin que haya sido necesario introducir ningún axioma especial.

TERCER GRUPO DE AXIOMAS : AXIOMAS DE CONGRUENCIA

Los axiomas de este grupo sirven para definir la noción de congruencia, lo que en geometría euclideana se llama desplazamiento o movimiento de una figura indeformable.

Haremos primero la convención siguiente : entre los segmentos existen ciertas relaciones que expresaremos con la palabra *congruente* o *igual*.

III_1. Sean A y B dos puntos de una recta a y además A′ un punto de esta misma recta o de otra recta a'; se puede encontrar siempre sobre la recta a', de un lado dado del punto A′ un punto B′ y uno solo, tal que el segmento AB sea congruente con A′B′ lo que se escribe

$$AB \equiv A'B'.$$

Cada segmento es congruente con sí mismo y se tiene entonces :

$$AB \equiv AB \quad \text{y} \quad AB \equiv BA.$$

Se puede expresar esto más rápidamente diciendo que todo segmento puede ser *llevado* o *transportado* sobre una recta dada, de un lado dado, desde un punto determinado, de una manera unívoca.

III_2. Cuando un segmento AB es congruente con un segmento A′B′, y también con el A″B″, entonces también el A′B′ es congruente con el A″B″, o sea, si $AB \equiv A'B'$ y $AB \equiv A''B''$, se tiene también

$$A'B' \equiv A''B''.$$

III_3. Si sobre una recta a hay dos segmentos AB y BC sin otro punto común que B y además sobre la misma recta a o sobre otra a', dos segmentos A′B′, B′C′ sin otro punto común que B′, y se tiene

$$AB \equiv A'B' \qquad y \qquad BC \equiv B'C'$$

se tendrá también

$$AC \equiv A'C'.$$

Definición de ángulo. — Sea α un plano cualquiera y en este plano h y k dos semirectas cualesquiera, salidas desde un mismo punto O.

El sistema formado por tales *semirectas* se llama *un ángulo* y lo designamos por $\sphericalangle (h, k)$ o $\sphericalangle (k, h)$ indistintamente. Recordando los axiomas II_1 y II_4 de distribución, deduciremos que los elementos h, k y O dividen al plano en dos regiones, la interior de $\sphericalangle (h, k)$ y la exterior de $\sphericalangle (h, k)$. Las semirectas se llaman *lados del ángulo* y el punto O, será el *vértice.*

III_4. Sea dado un ángulo $\sphericalangle (h, k)$, en α, y otro plano α' en el que hay una recta a'; supongamos que en α' esté determinado un lado de la recta a'. Sea h' una semirecta tomada sobre a' con origen en O′ : decimos que en el plano α', y del lado predeterminado de a' existirá una semirecta k', y una sola, con origen en O′ y tal que

$$\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h', k').$$

Este axioma define la congruencia o igualdad de los ángulos. Se puede añadir que :

$$\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h, k)$$

$$\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (k, h),$$

o lo que es lo mismo, todo ángulo es congruente consigo mismo. También se puede decir, que en un plano dado, todo ángulo puede ser *llevado* de una manera unívoca de un lado determinado de una recta dada.

III_5. Si un ángulo $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h', k')$, así como también el mismo ángulo $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h'', k'')$, se tendrá también :

$$\sphericalangle (h', k') \equiv \sphericalangle (h'', k'').$$

Aclaración. — Antes de ir más adelante, hagamos la siguiente convención aclaratoria : Sea ABC un triángulo, es decir el polígono plano de los tres puntos A, B y C. Designaremos las dos semirectas que salen de A y pasan por B y C, respectivamente por c y b. El $\sphericalangle (b, c)$, lo llamaremos el ángulo A del triángulo ABC; A está formado por los lados AB y AC, y diremos también que es el ángulo opuesto al lado BC o a. Este ángulo encierra en su interior todos los puntos del interior del triángulo ABC y lo designaremos por $\sphericalangle$ (BAC) o $\sphericalangle (b, c)$ o $\sphericalangle$ A.

III_6. Si dos triángulos ABC y A′B′C′ son tales que se verifican las congruencias :

$$AB \equiv A'B'; \qquad AC \equiv A'C'; \qquad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C',$$

se tendrá también

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$$

$$\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'.$$

Los tres primeros de los axiomas citados encierran enunciados que se refieren a congruencias entre segmentos situados sobre rectas, y por lo tanto, pueden ser llamados los *axiomas lineales* del grupo III. Los dos siguientes se refieren a congruencia de ángulos, y el último refiere la congruencia de segmentos y a la de ángulo, en un triángulo: estos tres últimos axiomas se refieren, pues, evidentemente, a elementos de la Geometría plana, y por lo tanto los llamaremos *axiomas planarios* del grupo III.

Las consecuencias que de estos axiomas se deducen son muchas. Las principales resultarían de las convenciones siguientes :

Sean A, B, C, D, ..., K, L, y A′, B′, C′, D′, ..., K′, L′, dos series de puntos sobre las respectivas rectas a y a', y tales que los segmentos correspondientes AB y A′B′; AC y A′C′; BC y B′C′, ..., KL y K′L′, sean respectivamente congruentes entre sí : se dice entonces que las dos *series de puntos* son *congruentes entre sí :* A y A′; B y B′; C y C′, ..., L y L′ se llaman *puntos correspondientes* de las dos series puntuales congruentes.

Dos ángulos que tengan el mismo vértice y un lado común y cuyos lados no comunes están en línea recta, se llamarán *suplementarios.*

Dos ángulos que tengan el mismo vértice y cuyos lados (semirectas) están dos a dos en línea recta, pero no superpuestos, se llamarán *opuestos por el vértice.* En tal figura el vértice común de ambos ángulos es la intersección de las rectas, a las que divide en dos semirectas, y cada par de semirectas limita uno de los dos ángulos referidos.

Un ángulo que es congruente con su suplementario se dice un *ángulo recto.*

Dos triángulos ABC y A′B′C′, se dicen congruentes entre sí, cuando se verifican las congruencias :

$$AB \equiv A'B' \qquad AC \equiv A'C' \qquad BC \equiv B'C'$$

$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A' \qquad \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B' \qquad \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'.$$

Teoremas de igualdad o congruencia de triángulos

Dos triángulos son congruentes entre sí cuando se verifican las congruencias :

$$AB \equiv A'B' \qquad AC \equiv A'C' \qquad \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$$

o sea, cuando tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido.

Para demostrarlo, recordaremos que, según el axioma III_6, las congruencias

$$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B' \qquad \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$$

son verificadas, y por lo tanto bastaría demostrar la de los lados BC y B′C′. Supongamos que no lo fuesen (fig. 7) y determinemos en B′C′ un punto D′ tal que $BC \equiv B'D'$. Los dos triángulos ABC y A′B′D′ serían congruentes por el axioma III_6, pues tendrán dos lados y el ángulo comprendido congruentes; por lo tanto sería $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'D'$, lo que es imposible, pues según el axioma III_4 un ángulo no puede ser llevado más que de una *sola* y *única* manera a partir de un punto dado, de una recta dada en un plano.

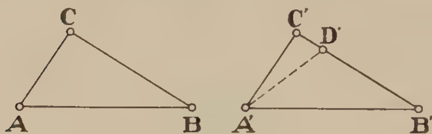


Fig. 7

De una manera completamente análoga se demostrarían los siguientes teoremas, de los cuales daremos únicamente los enunciados.

En dos triángulos, cuando un lado y los dos ángulos respectivamente adyacentes son congruentes entre sí, los dos triángulos son también congruentes.

Cuando dos ángulos $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle A'B'C'$ son congruentes entre sí, son también congruentes sus suplementarios.

Los ángulos opuestos por el vértice, son congruentes.

Todos los ángulos rectos son congruentes entre sí.

Esta proposición es un verdadero teorema, aunque Euclides lo incluyó entre los axiomas.

Las definiciones de ángulo obtuso y agudo, se pueden establecer de la manera conocida, después de haber demostrado la congruencia de todos los ángulos rectos.

La congruencia de los ángulos en la base de un triángulo isósceles, resulta inmediatamente de aplicar el axioma III_6 a los triángulos cuando tienen sus tres lados respectivamente congruentes entre sí.

Para extender estas nociones al espacio, definiremos una *figura,* como compuesto por un número cualquiera de puntos. Si todos los puntos están en un plano, la figura se llamara *plana;* en caso contrario será una figura en el espacio.

Dos figuras se llaman congruentes, cuando se pueden hacer corresponder los puntos dos a dos, de tal manera que los segmentos y los ángulos correspondientes en las dos figuras sean respectivamente congruentes entre sí.

El teorema más general relativo a la congruencia para el plano y para el espacio, se expresaría como sigue :

Si (A, B, C, ...) y (A′, B′, C′, ...) son figuras planas congruentes, y si se designa por P un punto en el plano de la primera figura, se podrá siempre determinar en el plano de la segunda figura un punto P′, tal que (A, B, C, ..., P) y (A′, B′, C′, ..., P′) sean igualmente figuras congruentes. Si la figura (A, B, C, ...) contiene por lo menos $\begin{Bmatrix}\text{tres}\\ \text{cuatro}\end{Bmatrix}$ puntos que no están en $\begin{Bmatrix}\text{línea recta}\\ \text{un plano}\end{Bmatrix}$ la determinación de P′ será posible de una *sola* y *única* manera.

Los teoremas de congruencia relativos al espacio encierran este resultado importante : todas las verdades *espaciales* relativas a la congruencia, son exclusivamente consecuencias de los dos primeros grupos de axiomas y de los seis axiomas *lineales* y *planarios* de la congruencia antes enunciados, y, por lo tanto, el axioma de las paralelas, no es necesario para establecerlos.

CUARTO GRUPO DE AXIOMAS : AXIOMA DE LAS PARALELAS

Comprende un solo axioma, pero de la mayor importancia : es el famoso axioma de las paralelas o postulado de Euclides ; lo enunciaremos en esta forma :

IV. Sea *a* una recta y A un punto fuera de ella. En el plano $\alpha \equiv a$A existe una recta y una sola que puede pasar por A y no cortar a *a*. Esta recta se llama la paralela trazada a *a* por A.

Este enunciado del axioma de las paralelas encierra dos afirmaciones; la *primera* es : en el plano α pasa siempre por A una recta que no encuentra a *a*; la *segunda* : sólo puede existir una tal recta. Esta segunda parte es esencial.

Se puede enunciar esta afirmación del axioma en forma de teorema del siguiente modo :

Cuando en un plano, dos rectas *a* y *b*, no encuentran una tercera recta *c*, del mismo plano, tampoco se encuentran entre sí.

En efecto : si *a* y *b* tuviesen un punto común A, podría existir en el plano dos rectas *a* y *b* que pasasen por A y no encontrasen a *c*, lo que está en contradicción con el axioma de las paralelas en su enunciado primitivo.

Uniendo ahora el axioma de las paralelas a los de congruencia, podriamos establecer las siguientes proposiciones conocidas :

Cortando dos paralelas por una tercera recta, los ángulos alternos-externos, alternos-internos, y correspondientes, son respectivamente congruentes; y recíprocamente, la congruencia de los ángulos respectivos citados, con las denominaciones anteriores, tiene por consecuencia el paralelismo de las dos rectas.

Los tres ángulos de un triángulo forman, en conjunto, dos ángulos rectos.

Si consideramos ahora un punto cualquiera M, de un plano α, el conjunto de todos los puntos A, tales que los segmentos AM sean congruentes entre sí, se llama un *círculo*; el punto M es el *centro* del círculo.

De esta definición y aplicando los axiomas de los grupos III y IV, se deducen fácilmente todos los teoremas conocidos, relativos al círculo, en particular aquel que se refiere a la posibilidad de hacer pasar un círculo por tres puntos no situados en línea recta, el de la congruencia de los ángulos inscritos en el mismo segmento y el relativo a los ángulos del cuadrílatero inscriptible (1).

(1) Los autores antiguos y algunos modernos dicen « circunferencia de círculo » o también « circunferencia » sin mayor especialización, pero es más breve y claro llamar esa línea « círculo » como se llaman « elipse », « lemniscata », etc., las líneas que forman la periferia de las superficies encerradas por aquéllas.

QUINTO GRUPO DE AXIOMAS : AXIOMAS DE CONTINUIDAD

Este grupo contenía en los primeros trabajos de Hilbert, un solo axioma, el de Arquímedes, o axioma de la medición. Posteriormente reconoció la necesidad de añadir otro, llamado en alemán *Vollständigkeit,* que puede traducirse por *integridad* ó *plenitud.*

El axioma de Arquímedes permite introducir en la Geometría la noción de continuidad.

Antes de enunciarlo, debemos hacer una convención relativa a la igualdad de dos segmentos sobre una recta; para eso podemos tomar por fundamento los axiomas sobre la congruencia de los segmentos y llamar *iguales* a los segmentos congruentes o bien, basándonos en los tres primeros grupos de axiomas, convenir en la manera mediante la cual y por medio de construcciones apropiadas, un segmento puede ser llevado sobre una recta dada y a partir de un punto dado, de modo que se obtenga un nuevo segmento que le sea *igual.*

Cualquiera de estas dos convenciones que hagamos, podremos después enunciar el axioma de Arquímedes de la siguiente manera :

V_1. Sea A_1 un punto cualquiera situado sobre una recta entre los puntos dados A y B. Construyamos los puntos A_2, A_3, A_4, ..., tales que A_1 esté situado entre A y A_2; que A_2 esté entre A_1 y A_3; que A_3 esté entre A_2 y A_4, ..., y así sucesivamente, y tales que los segmentos

$$AA_1,\ A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4,\ \ldots$$

sean iguales entre sí; entonces, en la serie de puntos A_2, A_3, A_4, ..., existirá siempre un cierto punto A_n tal que B esté entre A_{n-1} y A_n.

El axioma de Arquímedes es un axioma lineal.

El axioma de *integridad* o *plenitud* puede enunciarse de la siguiente manera :

V_2. El conjunto de puntos, rectas y planos o elementos de la Geometría, forma un sistema de cosas que no puede ser amplificado, siempre que se quieran mantener los axiomas anteriores : es decir, que al sistema así formado, es imposible agregar otras cosas tales que en el sistema total resultante subsistan todos los axiomas citados en los cuatro primeros grupos.

El segundo de los axiomas de este gupo, se impone sólo en el caso de admitirse el primero, pues si no se admite éste, es fácil concebir

sistemas que agregados al de los puntos, rectas y planos lo amplifiquen, y a pesar de eso subsistan los axiomas de los cuatro primeros grupos en el sistema así amplificado.

CAPÍTULO III

Transformaciones por homotecia y por inversión

Antes de hablar de las transformaciones por inversión, vamos a recordar algunas sencillas propiedades geométricas, que nos ayudarán en las investigaciones posteriores.

I. POLARES

a) El lugar geométrico de los conjugados armónicos de un punto P, *con respecto a un círculo c, es una recta p, normal a* PC (fig. 8).

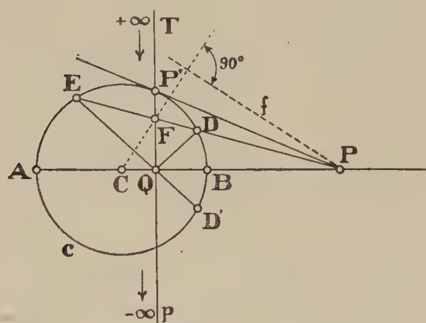


Fig. 8

Para demostrarlo, tomemos Q armónico de P con respecto a AB, tracemos una secante cualquiera PDE, unamos E con Q y prolonguemosla hasta encontrar a la circunferencia en D′. Por la simetría de la figura es fácil ver que BD = BD′ y por lo tanto ángulo DQB = ángulo D′QB; luego QB es bisectriz de DQD′ y QT, que le es perpendicular, será bisectriz de EQD; y el punto F, en que la QT corta a ED, será por lo tanto conjugado armónico de P, respecto a DE, lo que demuestra que QT, es la polar del punto P, con respecto al círculo *c*.

b) Llamando P′ el punto en que la recta *p* corta a *c*, la recta PP′ es tangente al círculo, pues allí los puntos D y E se confunden con los de *p*.

c) Como el triángulo CP′P es rectángulo en P′, se tiene :

$$CQ \, . \, CP = r^2$$

llamando *r* el radio del círculo.

d) La polar de un punto F, cualquiera de p, pasa por P, porque (DEFP) = — 1.

e) Luego la polar f de F, será la perpendicular llevada por P a FC.

f) Cuando F sea el punto en el infinito de p, $f \equiv$ PC, o sea, pasa por el centro del círculo.

g) Si f gira al rededor de P, el punto F describe enteramente la recta p, desde el infinito positivo al negativo; y recíprocamente.

h) El polo de la recta de unión de dos puntos cualesquiera M y N, es el punto de intersección de sus dos polares m y n.

k) La polar de un punto del círculo, es su tangente en este punto.

Finalmente, observaremos que todas las propiedades enunciadas son *inmediatamente* proyectivas, excepto la c y la e, que expresan relaciones *métricas*.

II. HOMOTECIA (O SIMILITUD HOMOTÉTICA)

Consideremos un círculo c de centro C (fig. 9), que supondremos engendrado en un cierto sentido determinado, y un punto O de su

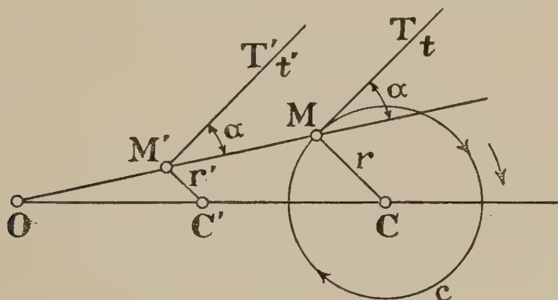


Fig. 9

plano. Tomemos un punto M sobre c, y otro M' alineados ambos con O. Tracemos la M'C' paralela con MC, que corta OC en C' y además en M la tangente t, que formará un ángulo α con OM; y por M' una recta t' paralela a t, que formará por lo tanto el mismo ángulo α con OM. Si ahora hacemos girar a t de modo que envuelva al círculo c, el ángulo CMT, recto, se conservará recto y uno de sus lados (el radio) pasará por C. El ángulo C'M'T' también recto, se conservará así igualmente, y como uno de sus lados pasa siempre por C', supuesto fijo, su otro lado M'T' envolverá otra circunferencia de centro C', puesto que

la semejanza de los triángulos OMC y OM′C′ nos permite escribir :

$$\frac{OC}{OC'}=\frac{OM}{OM'}=\frac{r}{r'}.$$

(Si el punto M′ se toma de modo que O separe a M y M′, la figura varía algo, pero la demostración sería la misma.)

El punto O es el *centro de similitud* de los dos círculos.

III. INVERSIÓN

Consideremos otra vez (fig. 10) el círculo c de centro C, y el círculo c', de centro C′ homotético con el anterior respecto al centro O. Tra-

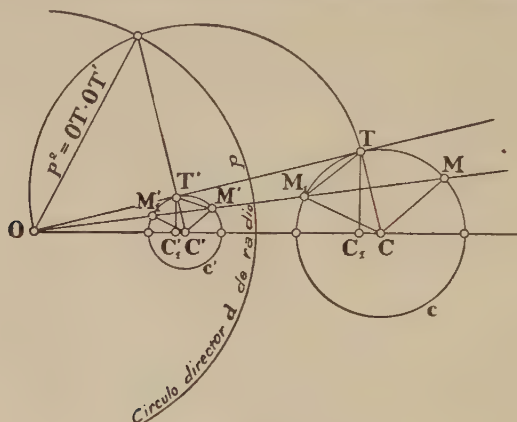


Fig. 10

cemos OM : cortará al círculo c' en el punto M′ de antes, pero también en otro punto M_1', que se llama el *inverso* de M respecto al *centro de inversión* O, que lo es también de homotecia para ellos. El punto M_1' es, además de inverso de M, el homotético del punto M_1 en que OM corta al círculo c y este M_1 a su vez es el inverso del segundo punto de intersección M′ de OM_1' con c'.

La tangente por O es común a ambos círculos c y c' y los toca en T y en T′. El cuadrilátero $M'T'TM_1$ es inscriptible, por tener sus ángulos opuestos suplementarios, pues M′T′T es medido por la mitad del arco M′T′ en el círculo c', y es igual a MM_1T medido por la mitad del arco MT en el círculo c, homotético de M′T′ en c'. También es inscriptible el cuadrilátero $M_1'T'TM$. De ahí resulta :

$$OM \,.\, OM_1' = OM' \,.\, OM_1 = OT' \,.\, OT = p^2$$

producto que es constante para cualquier par de puntos M y M_1' sobre cualquier rayo OM por O.

Si con $\sqrt{OT . OT'} = p$, como radio, desde O como centro, describimos un círculo, podemos decir que los puntos M del círculo c son inversos de los M_1' del círculo c' respecto a ese *círculo director* de radio p, o más brevemente, *que ambos círculos c y c' son inversos uno del otro, indistintamente, respecto al círculo director de centro* O *y de radio p;* llamaremos p^2 la *potencia* de esta inversión y d al círculo director de la misma.

Los puntos del círculo director son los inversos de si mismos, como resulta de $p . p = p^2$.

Una interesante particularidad en la transformación por inversión ofrecen los círculos que cortan ortogonalmente al círculo director. Decir, que el círculo director corta ortogonalmente a un círculo c (fig. 11), quiere decir que los radios $OT = p$ del director y $CT = r$ del c que van al punto de intersección T, son normales entre sí, pues así son tangentes : OT al c y CT al d. En estas condiciones, si M es un punto de c su inverso será M_1' en que OM corta otra vez a c, pues $OM . OM_1' = OT^2 = p^2$, y a cada punto c interior a d corresponde como inverso el exterior alineado con O, y recíprocamente. Resulta de lo que precede, que un círculo ortogonal c de un círculo director es su propio inverso, correspondiendo como inverso a la parte exterior $TM_1'T$ la interior y recíprocamente.

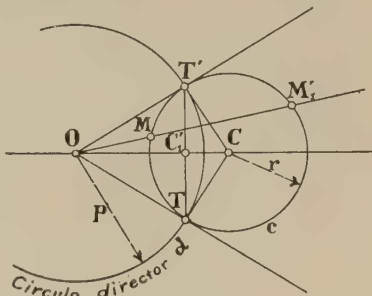


Fig. 11

En la transformación por inversión hay todavía una cuestión sobre la cual se debe llamar especial atención : ¿cuáles son los inversos de los centros de un par de círculos inversos? La contestación a esta pregunta no ofrece dificultad : el inverso del centro C con respecto al círculo director d (fig. 10) es el *pie* C_1' de la polar de O con respecto a c' y no el C', como pudiera creerse, y el de C' el pie C_1 de la polar de O con respecto a c.

En el caso de los círculos ortogonales del círculo director (fig. 11), el centro de uno de ellos no se corresponde por inversión a si mismo, pues no es doble por no estar sobre d, sino que su inverso es C_1' intersección de la polar TT de O respecto a c con la recta OC,

Las inversiones no forman grupo, pues dos inversiones sucesivas no dan una nueva inversión. En el caso particular de que se trate de dos inversiones del mismo centro, el resultado de la segunda inversión será un tercer círculo inverso con el segundo pero homotécico con el primero, porque

$$OM \,.\, OM' = p^2$$

$$OM' \,.\, OM'' = q^2$$

$$OM \cdot \frac{q^2}{OM''} = p^2$$

$$OM = OM'' \cdot \frac{p^2}{q^2}$$

o también :

$$\frac{OM}{OM''} = \frac{p^2}{q^2}.$$

Luego las inversiones forman grupo si se les agrega las homotecias del mismo centro.

Otras propiedades interesantes de las inversiones son las de ser

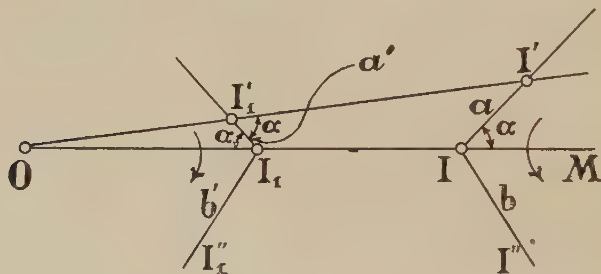


Fig. 12

transformaciones de contacto, isogonales y que conservan la relación anarmónica de las rectas que pasan por el centro de la inversión.

Son transformaciones *de contacto*, pues a un elemento lineal MN, hacen corresponder otro elemento M'N', y si dos curvas tienen un elemento lineal común (punto de tangencia y elemento infinitesimal asociado) sus inversas también lo tendrán.

Son transformaciones *isogonales*, es decir que conservan los ángulos; para demostrarlo, consideremos los puntos I, I_1 y sus infinitamente próximos I', I_1' (fig. 12).

El elemento lineal I I' se transforma en I_1 I_1' por hipótesis; luego $OI_1 \,.\, OI = OI_1' \,.\, OI'$ y por consiguiente el cuadrilátero $II'I_1'I_1$ es ins-

criptible y el ángulo exterior I′IM es igual al interior $I_1I_1'I'$. Pero los elementos I I′, I_1I_1' son infinitesimales por hipótesis, luego las rectas II_1, $I'I_1'$ son paralelas salvo infinitésimos de orden superior y se tiene

$$I'IM = I_1I_1'I' = OI_1I_1'$$

o sea que el ángulo α que hace el elemento II′ con el radio OI es igual al que hace el elemento inverso I_1I_1' con el mismo radio, pero el sentido de estos ángulos está invertido. Ahora bien, si dos elementos *ab* se cortan en un punto I, sus inversos se cortarán en el inverso I_1' y el ángulo $a\,(OI) = a'\,(OI_1)$ pero de sentido opuesto y lo mismo los ángulos $b\,(OI) = b'\,(OI_1)$, luego $\measuredangle\,(ab) = \measuredangle\,(a'b')$ pero de sentidos inversos.



Fig. 13

Para demostrar que se conserva la relación anarmónica, en las rectas que pasan por O, tomemos cuatro puntos cuyas abscisas contadas desde O, llamaremos x_1, x_2, x_3 y x_4 (fig. 13).

Tendremos, por ejemplo, para :

$$(1324) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} : \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4}.$$

Por la inversión, una abscisa x se transforma en $\frac{p}{x}$, siendo p el radio del círculo de inversión; entonces :

$$(1'3'2'4') = \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_4}} : \frac{\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_2}}{\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_4}} =$$

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{x_1x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_1x_4}\right) : \left(\frac{x_2 - x_3}{x_3x_2} : \frac{x_4 - x_3}{x_3x_4}\right) =$$

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{x_4 - x_1} : \frac{x_1x_2}{x_1x_4}\right) : \left(\frac{x_2 - x_3}{x_4 - x_3} : \frac{x_3x_2}{x_3x_4}\right) =$$

$$\frac{x_2 - x_1}{x_4 - x_1} : \frac{x_2 - x_3}{x_4 - x_3} = (1324)$$

$$\therefore \qquad (1324) = (1'3'2'4').$$

La figura inversa de una recta es el círculo que tiene su centro so-

bre la perpendicular trazada desde O a la recta y como diámetro la distancia desde O al punto inverso del pie de esa perpendicular sobre la recta. En efecto :

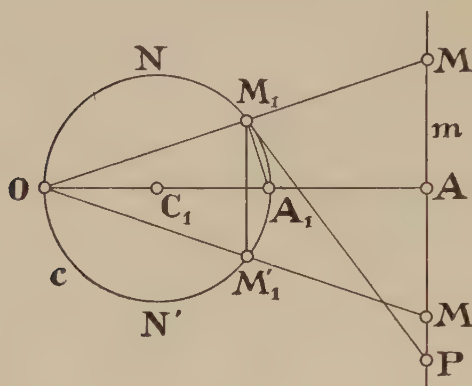


Fig. 14

Sea OA (fig. 14), la perpendicular a la recta y A_1 el inverso de A. Sobre OA_1 como diámetro, tracemos un círculo de centro C_1, y consideremos la línea OM_1M. Sea M_1P la tangente en M_1, y M', M_1' los simétricos de M y M_1 con respecto a OA.

El ángulo OM_1A_1 es evidentemente recto; y el PM_1M, tiene por medida la mitad del arco $ONM_1 = ON'M_1'$, que es también la medida del $OM_1M_1' = OMA$; luego el círculo de centro C_1 es la línea transformada isogonal de la recta *m*.

También se tiene que :

$$OA \,.\, OA_1 = OM \,.\, OM_1 = p^2;$$

luego cualquier punto M_1 del círculo *c* es el transformado por inversión del otro punto M de la recta *m*, en que OM corta a *m*.

Hubiéramos podido considerar a la recta *m*, como un círculo de radio infinitamente grande y entonces, si al punto A le correspondía A_1, al punto en el infinito de *m*, le correspondería O y la figura inversa de *m*, sería el círculo A_1M_1O.

Al punto en el infinito de *m* corresponde el centro O del círculo de inversión. Y este centro O es el inverso, no solamente del punto en el infinito de *m*, sino del de cualquier otra recta, de modo que el centro O corresponde como inverso a todos los puntos infinitamente distantes de ese centro, y se puede decir :

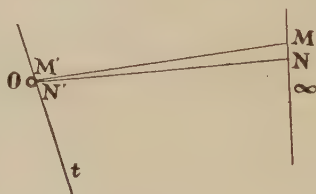


Fig. 15

A la recta en el infinito corresponde el punto único O y todos los elementos lineales que pasen por O corresponden a las diferentes direcciones del plano, o sea «puntos» de la recta en el infinito.

En realidad el punto O *no* es en este caso un punto, sinó un círculo

de radio nulo, cuyos elementos tangenciales son todos inversos de los elementos de la recta en el infinito.

Así, por ejemplo : la línea t (fig. 15) sería una de las prolongaciones de uno de estos elementos lineales.

Un caso particular de la inversión, sería la *simetría axial plana* (figs. 16 y 17); el centro de inversión, estaría en el infinito; el círculo de potencia p es el eje de simetría (fig. 17).

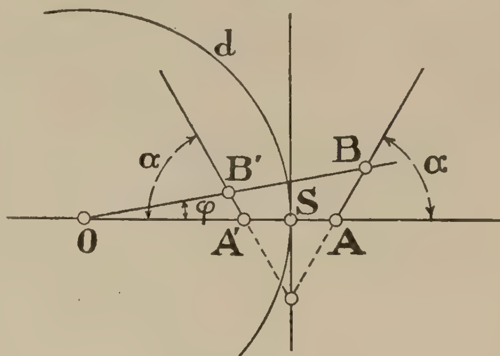


Fig. 16

En efecto (fig. 16) si d es el círculo de inversión, si A y A′, B y B′ son puntos inversos y φ el ángulo BOA supuesto muy pequeño, al elemento recto AB corresponderá el recto A′B′, pues AB se vuelve infinitamente pequeño al mismo tiempo que A′B′; además los ángulos α serán iguales e inversos, y los elementos AB y A′B′ separados por el círculo d, pero muy vecinos, se cortan sobre este círculo en un punto

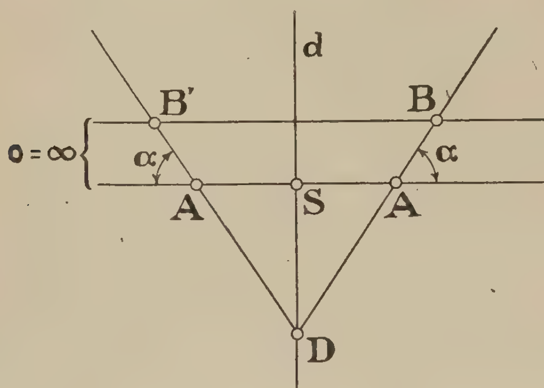


Fig. 17

doble D, en el límite, véase la figura 17 en la cual resalta la simetría plana de AB y A′B′ respecto al círculo d degenerado en recta d.

CAPÍTULO IV

Sistemas de círculos

Consideremos dos círculos (fig. 18), de centros C y C_1, y sea M un punto de igual potencia p con respecto a estos dos círculos.

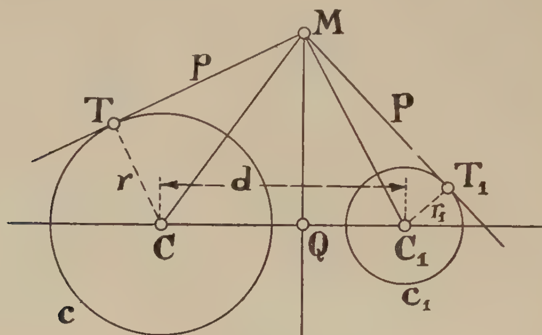


Fig. 18

Si consideramos la línea que une los centros y la perpendicular MQ bajada desde M sobre CC_1, tenemos :

$$CQ^2 = CM^2 - MQ^2 = p^2 + r^2 - MQ^2$$

$$C_1Q^2 = C_1M^2 - MQ^2 = p^2 + r_1^2 - MQ^2.$$

$$CQ^2 - C_1Q^2 = r^2 - r_1^2$$

$$(CQ + C_1Q)(CQ - C_1Q) = r^2 - r_1^2$$

$$CQ - C_1Q = \frac{r^2 - r_1^2}{d}$$

y como :

$$CQ + C_1Q = d$$

$$CQ = \frac{r^2 - r_1^2 + d^2}{2d}$$

$$C_1Q = \frac{r_1^2 - r^2 + d^2}{2d}.$$

De aquí se deducen muchas consecuencias.

El lugar geométrico de los puntos M de igual potencia con respecto a dos círculos c y c_1 es la recta perpendicular a CC_1 que pasa por el único punto Q, determinado por los valores CQ y C_1Q, que hemos escrito.

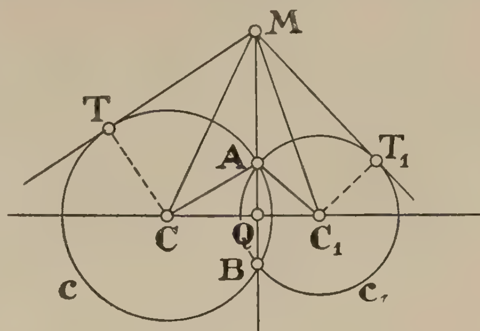


Fig. 19

Este lugar geométrico se llama *eje radical* de los dos círculos.

Si los dos círculos se cortan, el *eje radical* es la cuerda común, pues los puntos A y B tienen ya evidentemente la misma potencia nula. Además, para un punto cualquiera M (fig. 19) :

$$MT^2 = MA \,.\, MB = MT_1^2$$

∴

$$MT = MT_1.$$

También tenemos los triángulos AQC y AQC_1 que dan :

$$CQ^2 = CA^2 - AQ^2$$

$$C_1Q^2 = C_1A^2 - AQ^2$$

$$CQ^2 - C_1Q^2 = CA^2 - C_1A^2$$

$$(CQ + C_1Q)(CQ - C_1Q) = CA^2 - C_1A^2$$

$$CQ - C_1Q = \frac{r^2 - r_1^2}{d},$$

lo mismo que en el caso anterior.

Se puede observar que

$$CQ^2 = CA^2 - QA^2 = 0^2 + r^2 - AQ^2$$

∴

$$AQ^2 = r^2 - CQ^2,$$

y como AQ^2 es un cuadrado, solo será una cantidad real, cuando $r^2 - CQ^2$ sea positivo, o cuando $r > CQ$, es decir, cuando los círculos se corten.

Finalmente, es evidente que el eje radical de dos círculos tangentes es la tangente común.

Si en vez de dos círculos consideramos tres círculos, c_1, c_2 y c_3, sus tres ejes radicales pasarán por un mismo punto, o centro radical, pues r_{12} y r_{23}, se cortarán en un punto cuyas tangentes a los tres círculos c_1, c_2 y c_3, serán iguales, y por consiguiente será un punto de r_{13}.

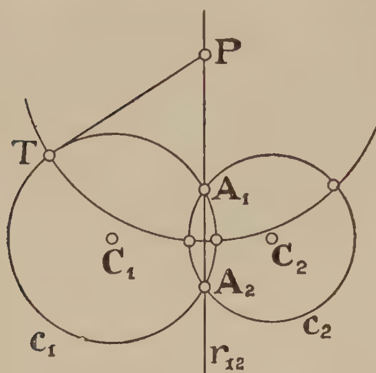


Fig. 20

Si desde este centro radical se describe un círculo r_{123}, teniendo por radio la tangente a uno cualquiera de los círculos, este círculo cortará ortogonalmente a los tres círculos. Se llega así a la noción de *haces lineales de círculos;* uno de ellos, por ejemplo, sería el formado por todos los círculos que cortan ortogonalmente a r_{123} : todos ellos tienen entre sí, dos a dos, ejes radicales que pasan por r_{123}.

Todos los círculos descritos desde un punto P cualquiera de r_{12} (eje radical de los círculos c_1c_2) como centro y PT como radio (fig. 20), cortarán normalmente a c_1 y c_2 : hay, pues, una simple infinidad de tales círculos, con centros en los varios puntos de r_{12}; todos ellos constituirán un *haz lineal* de círculos.

Si c_1 y c_2 se cortan en puntos reales A_1 y A_2, estos son puntos que pueden considerarse como los centros de círculos de radio nulo, que limitan los círculos del haz. En tal caso, este haz de círculos cuyos centros extremos son A_1 y A_2, puede llamarse *haz hiperbólico*.

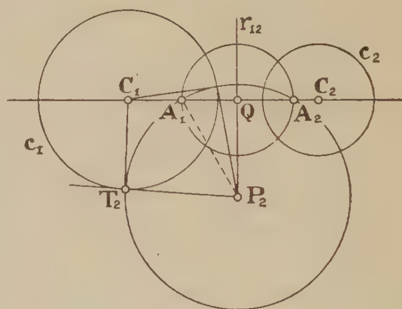


Fig. 21

Cuando los círculos no se cortan en puntos reales, no habrá círculos nulos límites del haz, pero habrá al menos un círculo mínimo m, que tendrá un centro Q sobre C_1C_2 perpendicular a r_{12}.

Los círculos ortogonales al haz hiperbólico antes encontrado, forman en este caso un haz con dos puntos reales A_1 y A_2, pues si un círculo P_2T_2 (fig. 21) corta a la línea C_1C_2 en A_1 y A_2, se tiene :

$$A_1Q^2 = A_1P_2^2 - QP_2^2 = P_2T_2^2 - P_2Q^2 =$$
$$= C_1P_2^2 - r_1^2 - P_2Q^2 = C_1P_2^2 - P_2Q^2 - r_1^2 =$$
$$= C_1Q^2 - r_1^2 = \text{constante.}$$

Luego todos los círculos normales a los del haz hiperbólico c_1c_2 forman a su vez otro haz sin puntos límites que llamaremos *haz elíptico,* formado por todos los círculos que pasan por A_1 y A_2 y tienen su centro sobre r_{12}; este haz tiene un círculo límite de diámetro A_1A_2. Es decir, que un haz hiperbólico con círculos nulos, determina otro, el elíptico con un círculo mínimo ortogonal al primero y recíprocamente.

Volviendo a la primitiva figura (fig. 20) con los dos círculos que se

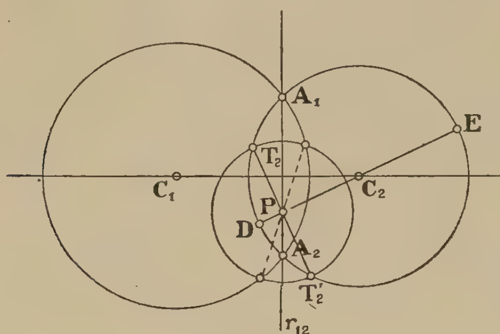


Fig. 22

cortan en A_1 y A_2, todos los círculos que tienen un centro sobre el segmento A_1A_2, y un radio igual a la potencia de P, con respecto a c_1 y c_2, *son cortados diametralmente,* ya no ortogonalmente por c_1 y c_2. En efecto :

Tomemos un punto P sobre r_{12} (fig. 22) y tracemos PC_2E que prolongaremos hasta D, y la T_2PT_2' perpendicular a PC_2; se tiene que :

$$PT_2^2 = PD \cdot PE = PT_2'^2,$$

que es la potencia de P con respecto a ambos círculos.

El haz que se obtiene es limitado, y todos sus círculos están contenidos en una elipse cuyos focos son A_1 y A_2 (fig. 23).

El círculo que tiene A_1A_2 como diámetro es el máximo del haz. Todos los círculos son cortados diametralmente por c_1 y c_2.

Este haz se llama también *hiperbólico, complementario* del anterior y como él, tiene círculos de radio nulo.

Cuando los círculos c_1 y c_2 se tocan en un punto A, la tangente común t_{12} será coincidente con su eje radical r_{12}. Los círculos descri-

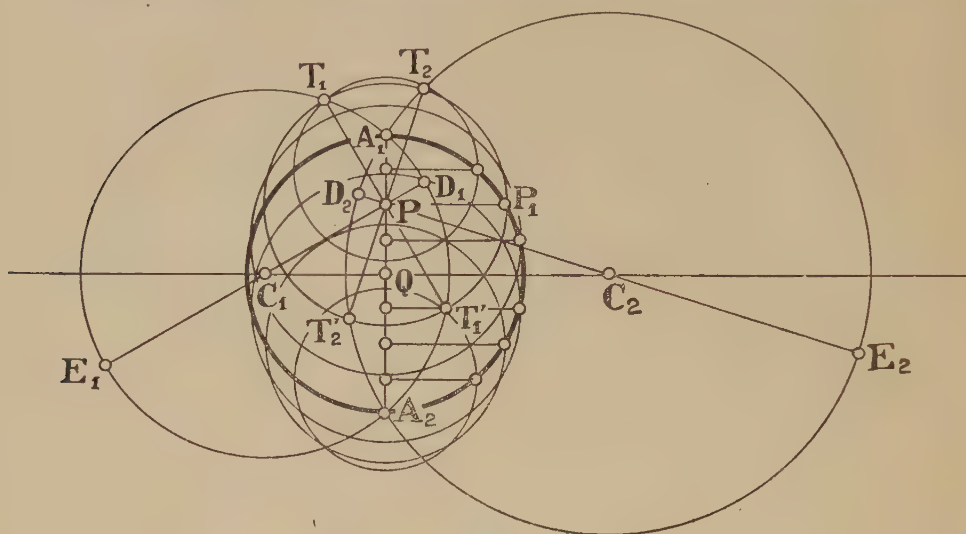


Fig. 23

tos desde un punto P de t_{12} con PA como radio, cortarán ortogonalmente a c_1 y a c_2, pues PA es la tangente desde P a c_1 y c_2.

Un haz de esta clase se llama *haz parabólico* de círculos (fig. 24).

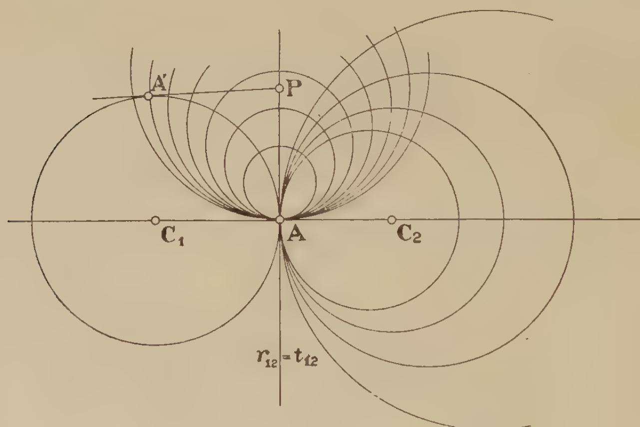


Fig. 24

Es evidente, por la misma definición y manera de construirlo, que el haz de círculos con centros en C_1 y C_2 y que pasan por A, forman otro haz parabólico ortogonal con el anterior.

El haz parabólico contiene como círculo nulo el círculo de centro A y radio nulo, que es evidentemente común con su ortogonal.

En resumen, tenemos tres tipos de haces de círculos :

1° Con dos puntos reales o *elíptico;*

2° Con un punto real o *parabólico;*

3° Sin puntos reales o *hiperbólico,* y podremos decir que el haz normal a un haz elíptico es hiperbólico y recíprocamente.

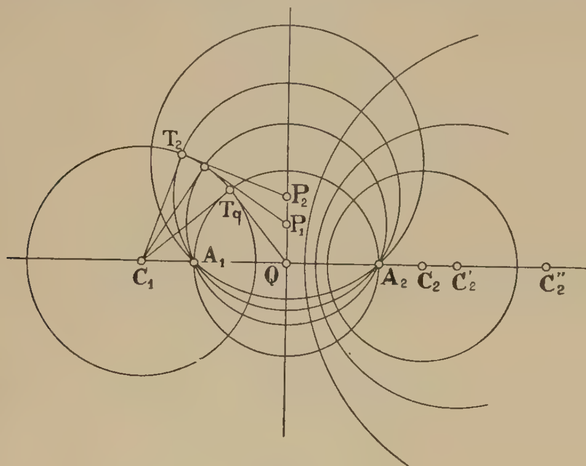


Fig. 25

Los círculos del haz elíptico (fig. 25) pasan por los puntos límites del haz hiperbólico, y el círculo mínimo del elíptico tiene los puntos límites del hiperbólico sobre él, diametralmente opuestos.

En el haz parabólico, el círculo mínimo coincide con los puntos límites confundidos ambos en un solo punto.

CAPÍTULO V

Las geometrías axiomáticas. Extensión lógica de la geometría euclideana

Los cinco grupos de axiomas que ha establecido Hilbert y que hemos recordado brevemente en las primeras páginas, constituyen un conjunto de los axiomas que son suficientes y necesarios para establecer la geometría euclideana; pero igualmente que ésta, permite establecer otras geometrías, llamando *punto,* o elemento más sencillo, o ente geométrico de primera especie a cualquier concepto, geométrico

o no, con tal que satisfaga a aquellos axiomas *en total,* integramente. Se podría establecer así para estos conceptos una geometría idéntica a la de Euclides, la que transcrita en el idioma ordinario es decir, volviendo a dar a cada concepto su nombre corriente, establecería una nueva geometría o mejor dicho, una transcripción, una transformación de la geometría euclideana en otra.

Los sistemas de círculos que acabamos de considerar en el capítulo anterior, nos ofrecen un ejemplo de esta interpretación o extensión lógica que es posible hacer de la geometría de Euclides, valiéndonos de los axiomas de Hilbert.

GEOMETRÍA DE LA RADIACIÓN PARABÓLICA DE CÍRCULOS

El conjunto de los círculos del plano que pasan por un punto fijo O, se llama *radiación parabólica* de círculos. Si por O trazamos una recta *t*, todos los círculos tangentes a esta recta en O forman un haz que ya hemos definido anteriormente como un *haz parabólico de círculos,* con sus centros sobre la recta *n,* perpendicular a *t*.

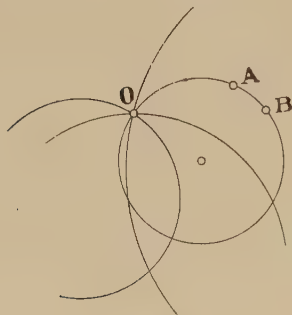


Fig. 26

Este haz se compone evidentemente de una simple infinidad de círculos, uno para cada punto A, B, C, ..., de la recta *n*.

A su vez la radiación se compone de una simple infinidad de haces, uno para cada recta *t*, que pasa por O. Luego, en la radiación hay tantos círculos distintos como puntos en el plano, o sea, una doble infinidad ∞^2.

Estas nociones podemos fácilmente extenderlas al espacio. El conjunto de todas las esferas que pasan por O forman una radiación parabólica de esferas; entre éstas, aquellas cuyo centro está sobre una cierta recta *n* normal a un plano que pase por O, al cual serán tangentes todas, forman un haz parabólico de esferas, compuesto de una simple infinidad de esferas.

A este conjunto de elementos geométricos, podemos aplicar los axiomas de Hilbert, de la siguiente manera :

Los axiomas de vinculación, que son los que forman el primer grupo, se aplican inmediatamente; en efecto :

Dos *puntos*, A y B (fig. 26), determinan un *círculo* y uno solo del

conjunto de círculos que pasan por O. En un círculo hay por lo menos dos puntos distintos además de O.

Un círculo está igualmente determinado por cualquier par de puntos de él, distintos de A y de B.

Tres puntos del espacio, A, B y C, determinan junto con O, una esfera, ε_0 del conjunto (O), siempre que no estén en un mismo círculo que pase por O.

Tres puntos cualesquiera de una esfera ε_0 no situados en un mismo círculo c_0 (es decir, que no pasa por O), determinan unívocamente esa sola esfera.

Si dos puntos A y B de un círculo c_0 están sobre una esfera ε_0, todos los puntos de c_0 están sobre ε_0.

Si dos esferas ε_0 y ε_0' tienen un punto común A, además de O, tendrán por lo menos otro punto B, común también.

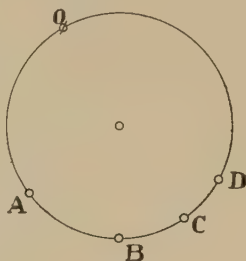


Fig. 27

Y finalmente, existen por lo menos, además del punto O, cuatro puntos A, B, C, D, no situados en la misma esfera ε_0.

En los enunciados anteriores hemos seguido uno por uno los axiomas que forman el grupo primero de axiomas, y hemos verificado que todos se satisfacen : luego si exceptuamos al punto O de nuestra consideración, si los *cortamos,* sacándolo del conjunto, si lo declaramos fuera de las consideraciones sucesivas, los axiomas del primer grupo se aplicarán exactamente a esta nueva forma de geometría, llamando :

Punto, al punto de la geometría euclídea ordinaria;

Recta, al círculo que pasa por O, en geometría euclídea ordinaria;

Plano, a la esfera que pasa por O, en geometría euclídea ordinaria.

Consideremos ahora los axiomas de ordenación que forman el segundo grupo.

Sean A, B y C tres puntos de un círculo c_0 : si B está *entre* A y C (fig. 27), está también entre C y A.

No admitamos que se pueda ir de C a A pasando por O, que es un punto de discontinuidad de la línea, pues lo hemos supuesto *cortado;* en este caso la verificación del axioma es evidente.

Si A y C son dos puntos de una recta, hay siempre por lo menos un punto B entre A y C y otro D, tal que C esté entre A y D. Es evidente siempre, por el corte que hemos supuesto existir en O. Dado

tres puntos A', B, C, hay siempre uno entre los otros dos y uno solo, debido igualmente al corte en O.

Sean A, B y C tres puntos no situados sobre un mismo círculo c_0, y a un círculo cualquiera que pasa por O pero que no contenga a A, ni B, ni C. Si a pasa por un punto P de AB (fig. 28), pasará también por otro punto Q del segmento AC, o por uno del segmento BC; esto es evidente por las propiedades vulgares ya conocidas de los círculos.

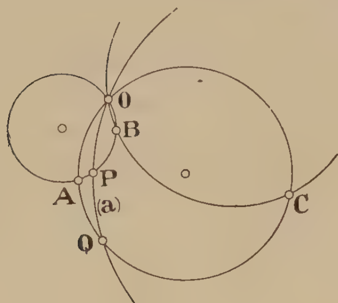


Fig. 28

De aquí se deducen todos los conceptos restantes de división de un círculo en dos partes por uno de sus puntos, A; de la división de la radiación plana de círculos que pasan por O, en dos por uno de sus círculos a; de la división de la radiación de esferas, que pasan por O, en dos partes, por una de ellas, etc.

En resumen, todos los axiomas del grupo II se aplican al conjunto parabólico de esferas que pasan por O.

Convengamos ahora en medir el ángulo de dos círculos (o de dos esferas) que se cortan en un punto (o en un círculo) por el ángulo de sus tangentes (o de sus conos tangentes), que pasan por dicho punto (o por dicho círculo). Veremos entonces que por un punto A pasa un solo círculo que haga un ángulo nulo con un círculo c_0, que será tangente a c_0 en O. Igualmente, dada una esfera ε_0, hay una sola que pase por A, y forme con ella un ángulo nulo; será la que pasa por A, y es tangente a ε_0 en O (fig. 29).

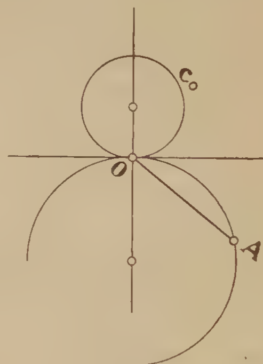


Fig. 29

Se puede llamar a tales círculos y esferas, *círculos y esferas paralelos,* pues como hemos supuesto cortadas las líneas en O, no se cortan los círculos, ni las esferas en este punto.

Los círculos y esferas paralelos, se tocan, pues tangencialmente en O, y toda esfera o círculo que no lleve esta condición, cortará a las demás esferas o círculos en otro punto, además de O. Para verlo, basta unir el punto A con O y trazar por el punto medio la perpendicular a AO que cortará en C a n_0 normal en O a la t_0 (fig. 30).

El círculo a_0 trazado con C por centro y OC por radio, cortará a c_0 en O y B; B será un punto simétrico de O respecto a la línea de los centros CC_0'.

Por un punto se puede trazar un solo círculo paralelo a otro dado. Esto es, con otras palabras, el mismo postulado de Euclides: no se puede trazar por un punto más que una sola paralela a una recta.

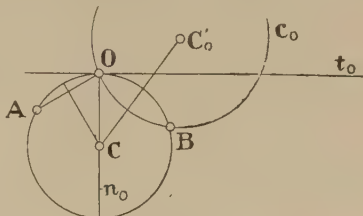


Fig. 30

Para aplicar los axiomas de congruencia, consideremos primeramente una radiación de círculos de centro O, e invertámosla, respecto de una potencia cualquiera p^2, usando como círculo inversor o director de la inversión a p; transformaremos así todos los círculos de la radiación en todas las rectas del plano; así el círculo c_0 (fig. 31), en recta c_0'; el círculo d_0 en d_0', etc.

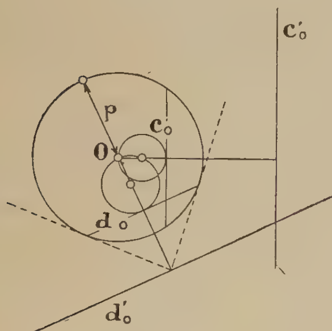


Fig. 31

Las distancias angulares se van a conservar y los círculos tangentes en O, se van a transformar en rectas paralelas. Luego está conforme con el axioma IV de la congruencia.

Podemos después de esto *definir* lo que llamaremos *distancias iguales* entre dos puntos A y B, de un círculo c_0, comparada con otra entre C y D del mismo círculo; bastará que sean tales que por inversión den distancias iguales: o sea que $A'B' = C'D'$.

CONSTRUCCIONES DE STEINER

Construcción primera. — Sean dadas dos rectas paralelas u y v; elijamos A_1 y B_1 sobre u (fig. 32), de modo que AA_1 y BB_1 se corten en S (lo que es siempre factible) exteriormente a uv; tracemos ahora AB_1 y A_1B, que se cortarán en T, interiormente a uv. ST cortará a v en M que será el punto medio de AB; la demostración se haría fácilmente por triángulos semejantes.

Construcción segunda. — Dados tres puntos A, M, B sobre una recta v tales que $AM = MA$ (fig. 33) y un punto A_1, podremos trazar la

paralela u a v por A_1; para eso bastará trazar AA_1 y A_1B : trazando después una recta SM, que corte a A_1B en T, y después las rectas

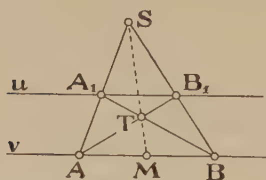


Fig. 32

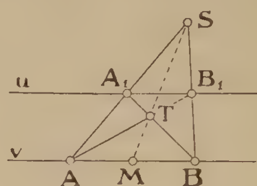


Fig. 33

AT y SB hasta que se corten en B_1, la línea $u = A_1B_1$ será la paralela v.

Se puede observar que AT *separa* AS de AB en el interior del ángulo SAB; luego SB tiene que ser cortada por AT.

Construcción tercera. — Supongamos dado *un círculo* (y *uno solo*), con su centro O que divide a todos los diámetros en dos partes iguales.

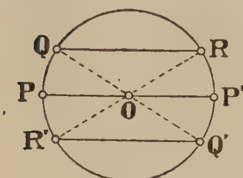


Fig. 34

Sea (fig. 34) PP′ un diámetor cualquiera; por Q se puede trazarle una paralela, pues ya hemos visto que por la segunda construcción, el trazado de una paralela es siempre posible cuando se dispone de un segmento de recta con su punto medio. Proyectando ahora Q y R desde O en Q′ y R′ sobre el círculo, tendremos las tres rectas QR, PP′ y R′Q′, las tres paralelas entre sí y equidistantes. Y como se puede elegir PP′ de modo que no sea paralela a una recta dada v, esta será cortada por ellas y podremos determinar sobre ella tres puntos A, M y B equidistantes y por lo tanto, será posible *trazar por un punto cualquiera del plano una paralela a una recta dada.*

Construcción cuarta. — Con esta construcción vamos a probar que es posible trasladar sobre una recta un segmento AB de modo que AB = A′B′ (fig. 35).

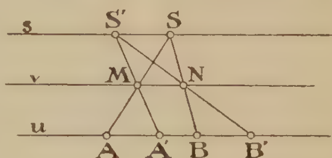


Fig. 35

Trazaremos primeramente v paralela a u, mediante la segunda construcción; uniremos A con un punto M de v y B con otro N también de v, determinando así el punto S; trazaremos por S la recta s, paralela a u y a v. Trazaremos A′M de modo que corte a s en S′, lo que es siempre posible, y proyectando N desde S′ en B′, tendremos finalmente AB = A′B′.

Construcción quinta (fig. 36). — Dado un círculo y un segmento QP, sobre el radio OAQP, podemos hacer girar la línea OAQP alrededor de O como centro, de modo que venga a colocarse en OA′Q′P′ después de haber girado un ángulo θ.

Para eso se traza QQ′ y PP′ paralelos a AA′.

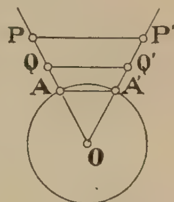


Fig. 36

Construcción sexta. — Dado un *solo círculo* (fig. 37), con su centro O, es posible trasladar un segmento de recta AB, de una recta a otra.

Se traza por O una recta u paralela a la recta dada a, y otra v' paralela a a', lo que es siempre posible mediante la construcción segunda.

Luego se traza una recta cualquiera AP estando P sobre u y después otra BQ paralela a AP; se traslada después PQ a P′Q′ mediante la construcción quinta y luego se traza P′A′ y su paralela B′Q′.

Construcción séptima (fig. 38). — Dado un *solo círculo,* con su centro O, trasladar un ángulo γ formado por las dos semirectas a y b sobre una semirecta a', desde su vértice S.

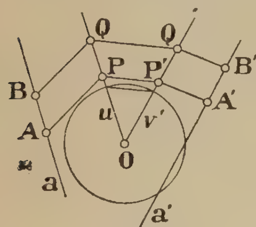


Fig. 37

Tomemos un punto C del círculo y tracemos por él CA paralela a a y CB paralela a b. El ángulo ACB será evidentemente igual al γ. Tracemos después por A una paralela a a' y sea esta AC′. Unamos C′ con B; el ángulo AC′B será igual al ACB. Si por S trazamos ahora la paralela b' a BC′, tendremos resuelto el problema.

Con las anteriores construcciones, combinadas en forma apropiada para cada caso, pueden resolverse los problemas referentes a la construcción de triángulos iguales y por consiguiente todos los axiomas del grupo III tendrán aplicación y explicación fácil, lo mismo que todas las ideas de igualdad y semejanza de las figuras geométricas euclideanas.

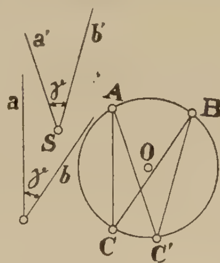


Fig. 38

Si ahora consideramos que con la inversión, a un círculo corresponde otro círculo, y a las rectas del plano, corresponden círculos que pasan todos por el centro O de la inversión y si hacemos la inversión de las siete construcciones anteriores, a todas las rectas del plano, les corresponderá la radiación parabólica de los círculos que pasan por el centro O de la inversión, al

círculo único dado, c, de centro M, le corresponderá otro círculo c' cuyo centro M′ será el inverso del polo de O respecto a c.

En la inversión de la construcción séptima, se conservarán las igualdades entre los ángulos por la isogonalidad de la inversión.

Quedará así plenamente comprobada la exactitud de los axiomas de congruencia del tercer grupo, en la radiación parabólica de círculos; y de un modo análogo se probaría para la radiación de esferas.

Luego podemos afirmar que todas las relaciones de la geometría euclídea existen en la geometría hecha sobre la radiación parabólica de círculos (y lo mismo de esferas), llamando :

Punto al punto de la geometría euclideana;

Recta al círculo de la geometría euclideana que pasa por O;

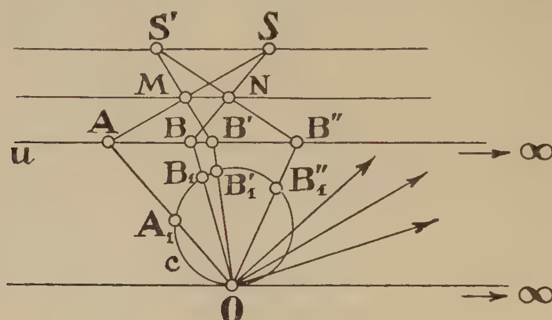


Fig. 39

Plano a la esfera de la geometría euclideana que pasa por O;

Punto en el infinito al punto O en la geometría euclideana.

Todas estas correspondencias entre elementos geométricos, se verifican fácilmente por inversión de las construcciones de Steiner; especialmente la última de las correspondencias, o sea la que existe entre el punto en el infinito y el punto O. Apliquemos la construcción de Steiner a una serie de paralelas equidistantes. Los puntos A, B, B′, B″, ..., de la recta u (fig. 39), tendrán por inversos respectivamente A_1, B_1, B_1', B_1'', ..., sobre el círculo C. Conforme el punto B se mueve sobre la recta u en la dirección de la flecha, el radio vector OB_1, OB_1', ..., sobre el cual debe estar el punto inverso, forma un ángulo cada vez más agudo con la tangente en O al círculo c. Cuando el radio vector se haga paralelo a u, se confundirá evidentemente con esta tangente y el punto en que el radio vector encuentra a u o sea el punto en el infinito de u, será O.

El adelanto que representan estas nociones para el estudio de la

geometría, es muy grande. Todo problema de geometría de la radiación parabólica, leído en geometría euclideana, se simplifica notablemente, y viceversa, todas las propiedades ya conocidas en la geometría euclideana, nos dan inmediatamente otra nueva en la geometría de la radiación parabólica; esto por de pronto nos permite decir que hemos duplicado el número de teoremas conocidos.

Por ejemplo, consideremos el teorema : «*las tres alturas de un triángulo pasan por un punto*»; en geometría de la radiación parabólica de círculos, lo tendremos transformado en el siguiente :

Dados tres círculos que pasan por un punto O, *los tres círculos que pasan por* O, *por los puntos de intersección de dos de los primeros y que cortan normalmente al tercero, pasan por un punto,* teorema que sería muy difícil de demostrar directamente, y que una vez demostrado, la aplicación rigurosa de todos los axiomas a la radiación parabólica de círculos, queda de hecho demostrada.

Lo mismo sería con cualquier otro teorema del triángulo : las tres medianas o las tres bisectrices se cortan en un punto, etc.

El teorema de Desargues, «*dos triángulos que tienen sus lados alineados con respecto a un punto, sus pares de lados correspondientes se cortan en puntos de una misma recta*», daría diferentes teoremas, según donde considerásemos el punto de inversión, pues al hacer corresponder a las rectas con los círculos que pasan por O, quedan incluídos como círculos de radio infinito las rectas que pasan por O. Tomando como centro de inversión el centro de homología de los dos triángulos, tendremos que los lados de estos dos triángulos se transformarán en círculos que pasaran todos por O. Los nuevos triángulos curvilíneos tendrán sus vértices correspondientes alineados con O, y sus pares de lados correspondientes (arcos de círculo), se cortarán en tres puntos que estarán sobre un círculo que pasará por O.

Si suponemos que el punto O se alejase al infinito, los círculos y las esferas de esta radiación, se acercarían a las rectas y planos de la geometría euclídea, con los cuales se confundirán en el límite : tendríamos así otra vez los elementos euclídeos *pero* con un solo elemento impropio en el infinito, el punto O; no es entonces la geometría euclídea sino la *parabólica :* no existe recta en el infinito.

La exactitud rigurosamente lógica de todo lo que hagamos en esta geometría parabólica, es evidente, axiomática, pues un error en ello, se reproduciría por inversión en la euclídea; y admitimos que en esta no hay errores de lógica.

El problema de la indemostrabilidad del postulado de Euclídes y

de la existencia posible de geometrías no euclideanas, tomó un aspecto completamente distinto del que antes tenía. Ahora ya hemos visto que *por los menos* hay dos geometrías igualmente lógicas, igualmente exactas, que satisfacen ambas a los grupos de axiomas, y esencialmente distintas entre sí, la *euclideana* y la *parabólica.*

Al negar la existencia de la una se niega forzosamente la de la otra.

Pero desde que hay dos, será posible tal vez que haya más, igualmente lógicas. Es lo que vamos a buscar en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO VI

Geometría de las radiaciones hiperbólicas y elípticas de círculos

INTERPRETACIÓN DE LAS GEOMETRÍAS DE LOBACHEVSKI BOLYAI Y RIEMANN

1. En los capítulos anteriores, hemos definido ya lo que entendemos por haces hiperbólicos y elípticos de círculos. Hemos definido también el centro radical de tres círculos, punto que tiene igual potencia con respecto a los tres círculos.

El círculo descrito con dicho punto como centro y con la tangente a uno cualquiera de los tres círculos como radio, corta normalmente a los tres círculos c_1, c_2 y c_3. Llamemos R_{123} al centro de este círculo y Ω_{123} al círculo.

Todos los círculos que cortan ortogonalmente al Ω_{123}, tienen entre sí dos a dos, ejes radicales, que pasan por el centro R_{123} de Ω_{123}, y

El conjunto de todos los círculos que cortan ortogonalmente a un círculo Ω, de centro C, forman lo que llamaremos una radiación hiperbólica de círculos, o más simplemente una radiación hiperbólica R_i.

2. Si el centro radical es interior a los tres círculos C_1, C_2, C_3, la potencia de R_{123}, es

$$p'^2 = r^2 - \overline{R_{123}C_i}^2 = p\left(\sqrt{-1}\right)^2$$

puesto que antes teníamos

$$p^2 = \overline{R_{123}C_i}^2 - r^2$$

como puede comprobarse comparando las dos figuras números 40 y 41.

El círculo trazado con R_{123}, como centro y p' como radio, cortará diametralmente a los tres círculos c_i, y

El conjunto de los círculos que cortan diametralmente a un círculo Ω *de centro* C, *forman,* como ya indicamos anteriormente, lo que llamamos *una radiación elíptica de círculos* R_e.

3. La radiación elíptica R_e, corta ortogonalmente al círculo Ω' de centro C y de radio $r\sqrt{-1}$, y recíprocamente, la radiación hiperbólica R_i, cortará diametralmente al círculo Ω de centro C y de radio $r\sqrt{-1}$.

Fig. 40

Esto se demostrará por la misma construcción de los círculos ortogonales y diametrales y por lo dicho en el último párrafo sobre el valor de la potencia cuando el centro radical es interior a los tres círculos.

4. También es fácil ver, que si hacemos una inversión con respecto a un centro C, y una potencia negativa, es decir, tomando un círculo director de radio igual a $p\sqrt{-1}$, tendremos, entre dos puntos homólogos A y A*, las relaciones (fig. 42)

$$CA \, . \, CA^* = \left(p\sqrt{-1}\right)^2 = -p^2.$$

Luego, si describimos desde C como centro y con p como radio el círculo c_p, el inverso de A, tomando a este círculo como círculo di-

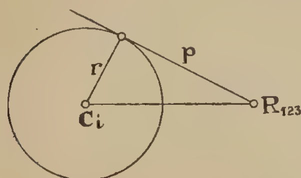


Fig. 41

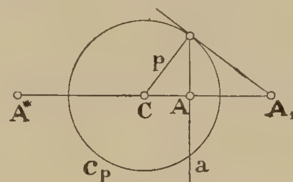


Fig. 42

rector, será A_1, que será también polo de la recta a, perpendicular a AC, con respecto a c_p, pues

$$CA \, . \, CA_1 = p^2.$$

Y si tomamos a A*, simétrico de A_1, con respecto a C, tendremos

$$CA \, . \, CA^* = -p^2.$$

Al punto A* lo podremos, pues, llamar el *antipolo* de a.

La inversión de A en A* es *elíptica,* o sea de potencia $-p^2$, negativa; su círculo director es imaginario; es la simetría central con res-

pecto a C de la inversión *hiperbólica* con potencia $+ p^2$ que transforma A en A_1.

5. Una inversión elíptica respecto a c_p transforma en si mismos todos los círculos que cortan a c_p diametralmente; la hiperbóiica los permuta por sus simétricos respecto al centro.

Una inversión hiperbólica transforma todos los círculos c_i ortogonales a c_p, en si mismos; la elíptica los permuta en sus simétricos.

En virtud de los raciocinios anteriores, se ve que todo lo indicado para la radiación hiperbólica, es válido para la elíptica y reciprocamente, basta cambiar p por $p\sqrt{-1}$.

6. Por dos puntos Q_1 y Q_2, inversos respecto al círculo director c_p, pasan una infinidad de círculos, que cortan ortogonalmente al c_p, caso hiperbólico; en el caso elíptico lo cortan diametralmente.

En la radiación hiperbólica puede, pues, haber así haces de círculos que pasen por Q_1 y Q_2, y serán :

Hiperbólicos, cuando Q_1 y Q_2 sean imaginarios;

Parabólicos, cuando Q_1 y Q_2 sean unidos;

Elípticos, cuando Q_1 y Q_2 sean reales y distintos.

En la radiación parabólica los haces son :

Parabólicos, rectas paralelas;

Elípticos, rectas no paralelas.

En la radiación elíptica, todos los haces son elípticos, desde que penetran en el círculo c_p, y lo cortan diametralmente, tienen que cortarse dos a dos.

7. Dos pares de puntos (Q_1, Q_2) y (P_1, P_2), inversos respecto a c_p, determinan un solo círculo, que hace parte de la radiación, pues en el cuadrilátero $Q_1Q_2P_1P_2$ se verifica que las rectas Q_1Q_2 y P_1P_2 pasan por C y dan :

$$CQ_1 . CQ_2 = CP_1 . CP_2,$$

y es pues inscriptible en el círculo dicho.

Luego dos puntos (y sus inversos respecto a c_p) determinan un círculo : Bastará pues un punto Q_1 para determinar el par Q_1Q_2, a este par de puntos, podemos llamarlo un *pseudo punto.*

Todos los axiomas planarios del primer grupo de axiomas quedarán verificados, si llamamos a un círculo de la radiación una *pseudo recta.*

En el espacio tendremos una *gerba* de esferas ortogonales a una esfera ε_p de radio p (o de radio $p\sqrt{-1}$, si la *gerba* es elíptica) y a una esfera de este conjunto la podremos llamar *un pseudo plano.*

Entonces se verifican también los axiomas del grupo I que se refieren al espacio.

Para verificar los axiomas de ordenación, hay que suponer *un corte* hecho a lo largo del círculo c_p o de la esfera ε_p. Entonces se puede hablar de un seudo punto que está entre otros dos pseudo puntos, etc.

Si se considera solamente la región del plano interior a c_p o del espacio interior a ε_p, se puede hablar en esta geometría sin el apodo seudo.

8. En estas tres geometrías tenemos :

Dos paralelas o seudo rectas en la geometría hiperbólica,

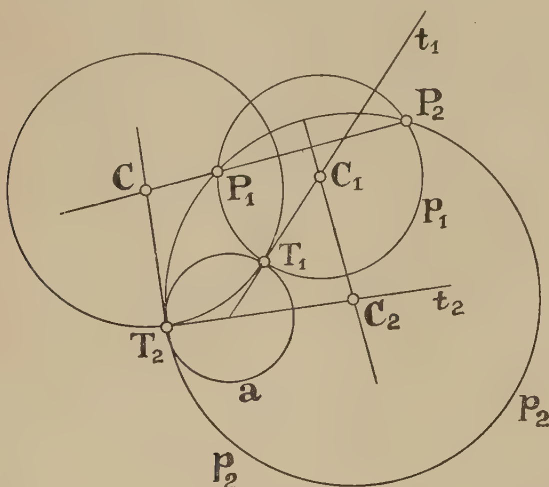


Fig. 43

Una sola paralela o seudo recta en la parabólica, y

Ninguna en la elíptica.

En efecto : hemos dicho ya, repetidas veces, que llamamos radiación hiperbólica de círculos al conjunto de círculos que cortan ortogonalmente un círculo dado, y que para poder hablar de los axiomas de ordenación era necesario suponer un corte hecho al rededor de todo este círculo. Como eliminamos, pues, en la consideración todos los puntos que componen este círculo, dos círculos (o seudo rectas) que se corten sobre estos puntos, *no* tendrán ningún punto común.

9. Sea pues *c* el círculo director de la radiación (fig. 43), *a*, un círculo o seudo recta cualquiera, y P_1, P_2 un punto del plano que no pertenezca a *a*.

Como es sabido, los puntos P_1 y P_2 son inversos. Los círculos que pasen por P_2, P_1 y sean tangentes a a en uno de los puntos T_1 o T_2, podremos decir que son las paralelas llevadas por el seudo punto P_1, P_2, a la seudo recta a. Para encontrar el centro de los círculos bastará levantar una perpendicular en el punto medio de P_1, P_2, y cortarla con las tangentes t_1, t_2 al círculo C, en los puntos T_1, T_2.

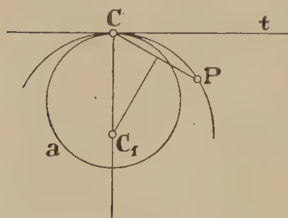


Fig. 44

En C_1 y C_2 tendremos los centros de dos círculos p_1 y p_2 que serán las paralelas a la seudo recta a.

10. En la radiación parabólica tenemos círculos que pasan todos por un punto dado.

Sea a, uno de estos círculos, y consideremos la tangente a a en C.

Si tomamos un punto P (fig. 44), que no pertenezca a a, podremos hacer pasar por él un círculo que sea tangente a a en C, para lo cual bastará cortar la perpendicular a CP, en su punto medio con la perpendicular a t en C. El círculo de centro C_1 y radio CC_1 será la seudo paralela a a, llevada por P.

11. En la radiación elíptica, consideremos análogamente el círculo director de centro C y un círculo a, que lo corte diametralmente en los puntos D_1 y D_2.

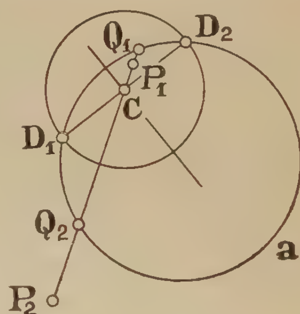


Fig. 45

Sea ahora el punto P_1, P_2 (fig. 45), se trataría de hacer pasar un círculo por este punto y que a la vez fuese tangente al a en los puntos D_1 o D_2. Pero esto no es posible, pues si P_1 es interior al a, P_2 será exterior y recíprocamente, pues P_1CP_2 corta a a en Q_1 y Q_2, y se debe tener :

$$CP_1 \,.\, CP_2 = CQ_1 \,.\, CQ_2.$$

Luego como es imposible trazar un círculo en las condiciones dichas, se deduce que no existe en esta clase de geometría ninguna paralela posible.

CAPÍTULO VII

La exactitud lógica de las geometrías euclideana y no euclideanas

1. Para demostrar la exactitud lógica de las cuatro geometrías que hemos establecido anteriormente, bastará demostrar la de una cualquiera de ellas, pues las restantes se deducen unas de otras por transformaciones inversas.

Para la euclideana, procederemos como sigue :

Llamemos *terna, triplete numérico,* o simplemente *triplete,* un grupo de tres números, por ejemplo, 5, 6 y 8, tomados en un cierto orden; así el triplete

$$5,\ 6,\ 8$$

es diferente del triplete

$$6,\ 5,\ 8$$

y del

$$8,\ 5,\ 6,\ \text{etc.}$$

2. Como números con los cuales vamos a operar, tomaremos el conjunto o «cuerpo de números» deducido de los enteros por las 4 operaciones racionales, más la raíz cuadrada : lo llamaremos *cuerpo* K, y además los deducidos de ellos por adición, substracción, multiplicación, división y extracción de raíz cuadrada.

3. Diremos que dos tripletes (a, b, c) y (a', b', c') son iguales cuando se verifique que

$$a = a' \qquad b = b' \qquad c = c'$$

y recíprocamente.

4. El conjunto de los tripletes es triplemente infinito, o sea, tiene tres dimensiones, lo que se comprende bien, pues el conjunto de los números definidos es simplemente infinito y tomamos tres números en cada triplete.

5. Dentro del conjunto o cuerpo de tripletes, llamaremos *conjunto de primer grado a dos dimensiones,* a todo grupo de tripletes que satisfagan a la ecuación

$$f'(x, y, z) = \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0$$

en la que A, B, C y D son cuatro números dados del cuerpo K.

Este conjunto es doblemente infinito, pues para un valor de x co-

rresponde también un valor de y arbitrario, quedando el de z fijado por la relación $f'(x, y, z) = 0$; hay luego en total, para los infinitos valores de x, un doble infinito número de tripletes, que satisfagan a $f'(x, y, z) = 0$.

6. Dos conjuntos $f'(x, y, z) = 0$, $f''(x, y, z) = 0$, los consideraremos como idénticos, cuando lo sean uno a uno todos los tripletes (x, y, z) que comprenden.

Los valores de A, B, C y D no pueden ser todos nulos para que aquella ecuación tenga algún sentido, y, por consiguiente, para definir un f' no se necesitan propiamente cuatro números A, B, C, D, sino simplemente la relación de tres de ellos a uno no nulo, o sea, por ejemplo, las relaciones A : B : C : D, es decir, tres números o sea tres números independientemente elegidos dentro del cuerpo.

7. Dados dos conjuntos

$$\left.\begin{aligned} f_1'(x, y, z) &\equiv A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ f_2'(x, y, z) &\equiv A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{aligned}\right\} g_1.$$

Estos dos conjuntos tendrán común un conjunto g_1, simplemente infinito de tripletes, pues entre los dos se puede eliminar una de las variables, y o z, por ejemplo, dar luego a x una simple infinidad de valores arbitrariamente elegidos y calcular en función de estos los correspondientes a z e y. Este nuevo conjunto lo llamaremos *de primer grado a una dimensión*.

8. De las dos ecuaciones últimamente escritas, resulta

$$f_{\varkappa\lambda}' \equiv \varkappa f_1'(x, y, z) + \lambda f_2'(x, y, z) = 0$$

que es también una ecuación de primer grado o un conjunto de primer grado a dos dimensiones. Los valores x, y, z de g_1 que satisfacen a $f_1' = 0$ y a $f_2' = 0$ satisfacen también $f_{\varkappa\lambda}' = 0$; luego este conjunto g_1, «está contenido» en el $f_{\varkappa\lambda}$, y cualesquiera que fueren los números $\varkappa$, λ, obtendríamos siempre un conjunto $f_{\varkappa\lambda}$, que «contendrá al g_1», o como se puede decir que «pasa por g_1». Los dos números $\varkappa$ y λ, son cualesquiera, dentro del grupo de números que hemos supuesto, pero lo único que interesa de ellos es la relación $\frac{\varkappa}{\lambda}$: luego podemos deducir de esto que *hay una simple infinidad de f', que comprenden a un g_1 dado*, o sea, que *cada conjunto de primer grado a una dimensión, está contenido en una simple infinidad de conjuntos de primer grado a dos dimensiones.*

9. Si un $f_{\varkappa\lambda}'$ debe contener a un cierto triplete (a, b, c) será necesario que

$$\varkappa f_1'(a, b, c) + \lambda f_2'(a, b, c) = 0$$

de donde

$$\varkappa = \omega f_2'(a, b, c) \qquad \text{y} \qquad \lambda = -\omega f_1'(a, b, c),$$

siendo ω un factor indeterminado, que puede ser cualquiera, puesto que el único valor que interesa es el de la relación $\varkappa \div \lambda$. Si substituímos estos valores en

$$f_{\varkappa\lambda}' \equiv \varkappa f_1'(x, y, z) + \lambda f_2'(x, y, z) = 0$$

resulta :

$$f_1'(x, y, z) f_2'(a, b, c) - f_2'(x, y, z) f_1'(a, b, c) = 0$$

como expresión de un f' que comprende un triplete y una y y la designamos con $f_{a,\,g}'$ para expresar que contiene al triplete (a, b, c) y al conjunto lineal g.

Para el triplete $(x, y, z) = (a, b, c)$, la última expresión escrita se reduce a una identidad, luego podremos con esto dar por demostrado que:

Un conjunto g_1 y un triplete (a, b, c), determinan uno y un solo conjunto f_1 que contiene a ambos.

El lector podrá apreciar a través de estos raciocinios, la identidad de los resultados que obtenemos, con otros que expresan en lenguaje geométrico ciertas verdades muy conocidas.

Pero aquí hemos partido de la idea abstracta de un conjunto de números, haciendo caso omiso de toda idea que pueda referirse a hipótesis especiales.

10. Siguiendo en este orden de ideas, consideremos entre el triplete fijo dado (x', y', z') y un triplete variable x, y, z, las ecuaciones :

$$(x - x') : (y - y') : (z - z') = a : b : c,$$

siendo a, b y c tres númoros cualesquiera elegidos entre los del cuerpo anteriormente definido y no nulos los tres simultáneamente; vamos a demostrar que determinan un g'. En efecto se tiene :

$$b(x - x') - a(y - y') = 0$$

$$c(y - y') - b(z - z') = 0$$

o sea :

$$bx - ay - (bx' - ay') = 0$$

$$cy - bz - (cy' - bz') = 0$$

expresiones que son de la forma

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

y que estarán satisfechas por el triplete

$$(x, y, z) = (x', y' z')$$

es decir que las ecuaciones

$$(x - x') : (y - y') : (z - z') = a : b : c$$

definían un g', que contenía a (x', y', z').

11. Si se pone

$$(x - x') : (y - y') : (z - z') = (x'' - x') : (y'' - y') : (z'' - z')$$

se tiene una g' que contiene a la vez a (x', y', z') y a (x'', y'', z''), por que :

$$(y'' - y')(x - x') - (x'' - x')(y - y') = 0$$

$$(z'' - z')(y - y') - (y'' - y')(z - z') = 0$$

y están satisfechos igualmente por el triplete (x', y', z') que por (x'', y'', z'').

Luego un conjunto g', está determinado por dos tripletes $(x' y' z')$ — (x'', y'', z'') cualesquiera : y recíprocamente, si dos g' tienen dos tripletes comunes, son idénticos pues contienen todos los mismos tripletes.

12. Tomemos ahora tres conjuntos f' :

$$A_1x + B_1y + B_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

cuya determinante no sea nula : este sistema determinará un solo triplete (x, y, z), o, si se tiene presente la discusión general de las ecuaciones de primer grado que doy por conocida, se deducirá que los tres conjuntos f pueden :

Tener un triplete común;

Tener un g' común;

Ser idénticos.

13. *Recíprocamente :* Dados tres tripletes (x', y', z'), (x'', y'', z''), $(x''',$

y''', z'''), se pueden calcular los coeficientes de las A, B, C, ..., o más bien sus relaciones a D; $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, ..., que serán números del cuerpo de números elegidos primeramente.

Pero si las tres ecuaciones se reducen a dos solamente, lo que sucederá cuando

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0$$

no se podrá obtener un solo triplete como solución, sino un número infinito, y entonces tendremos que los coeficientes de x', x'', x''' ... serán funciones lineales de uno de ellos.

Se podrá poner, por ejemplo,

$$x''' = \varkappa x' + \lambda x''$$

$$y''' = \varkappa y' + \lambda y'''$$

$$z''' = \varkappa z' + \lambda z'''$$

siendo $\varkappa + \lambda = 1$; y de aquí deduciremos :

$$x''' - x' = (\varkappa - 1)\, x' + \lambda x'' = \lambda\, (x'' - x')$$

$$y''' - y' = (\varkappa - 1)\, y' + \lambda y'' = \lambda\, (y'' - y')$$

$$z''' - z' = (\varkappa - 1)\, z' + \lambda z'' = \lambda\, (z'' - z').$$

Luego :

$$(x''' - x') : (y''' - y') : (z''' - z') = (x'' - x') : (y'' - y') : (z'' - z')$$

es decir que el (x''', y''', z''') está comprendido en el g' definido por :

$$(x'' - x') : (y'' - y') : (z'' - z') = (x - x') : (y - y') : (z - z')$$

que contiene a los tripletes (x', y', z') y (x'', y'', z''), y es definido por ellos.

En resumen : *tres tripletes no contenidos en un g' definen un f' y uno sólo:* y recíprocamente, *tres f' que no contengan el mismo g', determinan un solo triplete.*

Por consiguiente, una vez definidos los tripletes, los g' y los f' satisfacen a los mismos axiomas de ordenación que el punto, recta y plano, o entes geométricos del primer grupo de axiomas de Hilbert.

Así, pues, podemos llamar conjunto recto y conjunto plano, a esos conjuntos; o seudo punto al triplete, seudo recta al g' y seudo plano al f'

14. Los raciocinios anteriores derivaban de los axiomas de vinculación. Veamos los de ordenación.

Dados los tripletes (a_1, b_1, c_1) y (a_2, b_2, c_2) la g' que los contiene es:

$$(x - a_1) : (y - b_1) : (z - c_1) = (a_2 - a_1) : (b_2 - b_1) : (c_2 - c_1)$$

y también

$$(x - a_2) : (y - b_2) : (z - c_2) = (a_1 - a_2) : (b_1 - b_2) : (c_1 - c_2).$$

Luego:

$$\frac{x - a_1}{x - a_2} = \frac{y - b_1}{y - b_2} = \frac{z - c_1}{z - c_2} = \lambda_3.$$

Con λ_3, designamos un *parámetro* que define el valor de (x, y, z) y que puede tener cualquier valor excepto el valor 1, pues si $\lambda_3 = 1$, tendríamos que el triplete (a_1, b_1, c_1) sería igual al triplete (a_2, b_2, c_2) y ya no habría dos, sino uno solo y el (x, y, z) no estaría definido. Para $\lambda_3 = \infty = \frac{n}{0}$ tendríamos que $\frac{x - a_1}{x - a_2} = \lambda_3 = \infty = \frac{n}{0}$ daría

$$n(x - a_2) = 0 \qquad \therefore \qquad x = a_2$$

$$n(y - b_2) = 0 \qquad \therefore \qquad y = b_2$$

$$n(z - c_2) = 0 \qquad \therefore \qquad z = c_2$$

o sea

$$(x, y, z) = (a_2, b_2, c_2).$$

Para $\lambda_3 = 0$ tenemos:

$$\frac{x - a_1}{x - a_2} = 0 \qquad \therefore \qquad x = a_1$$

$$\frac{y - b_1}{y - b_1} = 0 \qquad \therefore \qquad y = b_1$$

$$\frac{z - c_1}{z - c_2} = 0 \qquad \therefore \qquad z = c_1$$

o sea

$$(x, y, z) = (a_1, b_1, c_1).$$

Si $\lambda_3 > 0$ tendremos

$$x - a_1 = \lambda_3 (x - a_2)$$

y si $x - a_1$ es positivo, también tendrá que serlo $x - a_2$ y lo mismo se puede decir de $y - b_1$ e $y - b_2$, $z - c_1$ y $z - c_2$.

Por consiguiente, si consideramos dos tripletes (a_1, b_1, c_1) y (a_2, b_2, c_2), y si

$$a_1 < a_2, \qquad b_1 < b_2, \qquad c_1 < c_2$$

lo cual indicaremos abreviadamente

$$(a_1, b_1, c_1) < (a_2, b_2, c_2)$$

tendremos, si

$$(a_1, b_1, c_1) < (x, y, z)$$

también

$$(a_2, b_2, c_2,) < (x, y, z)$$

es, decir, que el triplete (x, y, z) definido por λ_3, lo que abreviadamente llamaremos el triplete λ_3, es tal que los números (x, y, z) son todos mayores que (a_1, b_1, c_1) y que (a_2, b_2, c_2).

Inversamente, si $x - a_1$ fuera negativo se tendría :

$$(x, y, z) < (a_1, b_1, c_1) \qquad (x, y, z) < (a_2, b_2, c_2).$$

Si hubiéramos hecho la hipótesis de que $\lambda_3 < 0$, los resultados hubieran sido contrarios. Es decir, que los tripletes (x, y, z) comprendidos en la g', definida por (a_1, b_1, c_1) y (a_2, b_2, c_2) gozan de la misma propiedad que los números y se puede decir que ellos están o no comprendidos entre (a_1, b_1, c_1) y (a_2, b_2, c_2) según sea λ_3 negativo o positivo.

Lo mismo que sucede entre tres números que hay siempre uno que está comprendido entre los dos, sucede con los tripletes de un g'.

El conjunto de los tripletes de números que corresponden a los valores negativos de λ_3, forman *lo que llamaremos el segmento* $(a_1, b_1, c_1) - (a_2, b_2, c_2)$ *y estos dos tripletes serán las extremidades del segmento.*

15. Si consideramos de nuevo las ecuaciones

$$\frac{x - a_1}{x - a_2} = \frac{y - b_1}{y - b_2} = \frac{z - c_1}{z - c_2} = \lambda_3,$$

resulta

$$x - a_1 = (x - a_2)\lambda_3$$

$$x - a_1 = \lambda_3 x - \lambda_3 a_2$$

$$[1 - \lambda_3]\, x = a_1 - \lambda_3 a_2$$

$$x = \frac{a_1 - \lambda_3 a_2}{1 - \lambda_3}$$

y análogamente :

$$y = \frac{b_1 - \lambda_3 b_2}{1 - \lambda_3}$$

$$z = \frac{c_1 - \lambda_3 c_2}{1 - \lambda_1},$$

lo cual pone en evidencia que λ_3 no puede tener el valor 1, como ya lo habíamos advertido.

Consideremos ahora tres tripletes, λ_1, λ_2, λ_3, tales que λ_3 no esté sobre el g determinado por λ_1, λ_2, o en general, que uno de ellos no esté en el g determinado por los otros dos; tendremos :

$$x_1 = \frac{a_2 - \lambda_1 a_3}{1 - \lambda_1}; \qquad y_1 = \frac{b_2 - \lambda_1 b_3}{1 - \lambda_3}; \qquad z_1 = \frac{c_2 - \lambda_1 c_3}{1 - \lambda_1}$$

$$x_2 = \frac{a_3 - \lambda_2 a_1}{1 - \lambda_2}; \qquad \ldots; \qquad \ldots$$

$$x_3 = \frac{a_1 - \lambda_3 a_2}{1 - \lambda_3}; \qquad \ldots; \qquad \ldots$$

los tres tripletes, forman un triángulo λ_1, λ_2, λ_3, cuyas rectas, serán las seudo rectas :

$$g(\lambda_1, \lambda_2), \qquad g(\lambda_2, \lambda_3), \qquad g(\lambda_3, \lambda_1)$$

que pasan por los tres vértices λ_1, λ_2, λ_3; sus lados serán los segmentos cuyas extremidades son $\lambda_1\lambda_2$, $\lambda_2\lambda_3$ y $\lambda_3\lambda_1$, respectivamente. Los tripletes que hemos elegido, o sea λ_1, λ_2 y λ_3, determinarán un $f'_{1.\,2.\,3.}$ digamos f'_λ.

Si consideramos otro f'

$$f'_x = A_x x + B_x y + C_x z + D_x = 0$$

tal que la determinante de las relaciones :

$$\frac{A}{D}, \qquad \frac{B}{D}, \qquad \frac{C}{D}$$

de f_x y dos ánalogas cualesquieras de los f no tengan un Δ nulo, este f'_x, contendrá un $g'_{x\lambda}$ común con el $f'_\lambda \equiv f'_{123}$.

Este $g'_{x\lambda}$, tendrá con $g(\lambda_1, \lambda_2)$, $g(\lambda_2, \lambda_3)$ y $g(\lambda_3, \lambda_1)$, respectivamente un triplete común, pues se tratará en cada uno de estos casos de hallar la solución de dos ecuaciones que no tienen determinante nula.

Se tendrá entonces para uno cualquiera de esos tripletes :

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

o también :

$$A(a_2 - \lambda_1 a_3) + B(b_2 - \lambda_1 b_3) + C(c_2 - \lambda_1 c_3) + D(1 - \lambda_1) = 0$$

$$\lambda_1 (Aa_3 + Bb_3 + Cc_3 + D) = Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 + D.$$

De donde :

$$\lambda_1 = \frac{Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 + D}{Aa_3 + Bb_3 + Cc_3 + D}$$

y análogamente por permutación de índices :

$$\lambda_2 = \frac{Aa_3 + Bb_3 + Cc_3 + D}{Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 + D}$$

$$\lambda_3 = \frac{Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 + D}{Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 + D},$$

de donde

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = +1.$$

De modo que si λ_1 está entre $a_2 b_2 c_2$ y $a_3 b_3 c_3$, es decir negativo, es necesario que uno y sólo uno de los otros dos lo sea también, es decir que si λ_1 está en el segmento $(a_1 b_1 c_1)$ $(a_2 b_2 c_2)$ hay también uno de los otros dos λ en el lado respectivo del triángulo, y el otro no; en otros términos :

Si la seudo recta $g_{x\lambda}'$ corta un lado de un triángulo ella corta también uno de los otros y a uno solo.

Con esto vemos que los tripletes, los conjuntos g' y f', obedecen todos a los axiomas de ordenación contenidos en el grupo segundo de Hilbert, es decir, que los *seudo puntos*, o tripletes, las *seudo rectas*, y los *seudo planos*, obedecen a los axiomas del segundo grupo de Hilbert.

16. Sigamos adelante investigando si obedecen a los otros axiomas. Consideremos dos tripletes,

$$P_1 \equiv (a_1, b_1, c_1) \qquad y \qquad P_2 \equiv (a_2, b_2, c_2).$$

Calculemos el valor *positivo*

$$d_{12} = + \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2}.$$

Antes de seguir haremos una digresión sobre los fundamentos de la trigonometría coosiderada bajo un punto de vista puramente aritmético ; trataremos las funciones trigonométricas, empezando por *definir* la función :

$$y = e^{ix} \qquad \left(\text{con } i = \sqrt{-1}\right).$$

Sus derivadas sucesivas son :

$$y' = ie^{ix}\,; \qquad y'' = -e^{ix}\,; \qquad y''' = -ie^{ix}\,; \qquad y^{\text{IV}} = e^{ix}$$

y para el valor 0 de la variable

$$y = 1\,; \qquad y' = i\,; \qquad y'' = -1\,; \qquad y''' = -1\,; \qquad y^{\text{IV}} = 1$$

o sea alternativamente reales e imaginarias.

Aplicamos la serie de Taylor (forma de Mac Laurin) ; resulta :

$$y = e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{|\underline{2}} - i\frac{x^3}{|\underline{3}} + \frac{x^4}{|\underline{4}} + i\frac{x^5}{|\underline{5}} \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{|\underline{2}} + \frac{x^4}{|\underline{4}} + \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{|\underline{3}} + \frac{x^5}{|\underline{5}} \cdots\right).$$

Designemos con los símbolos $\mathrm{C}(x)$ y $\mathrm{S}(x)$ a los polinomios encerrados entre paréntesis, o sea

$$\mathrm{C}(x) = 1 - \frac{x^2}{|\underline{2}} + \frac{x^4}{|\underline{4}} - \frac{x^6}{|\underline{6}} + \cdots$$

$$\mathrm{S}(x) = x - \frac{x^3}{|\underline{3}} + \frac{x^5}{|\underline{5}} - \frac{x^7}{|\underline{7}} + \cdots$$

y éntonces el valor de e^{ix} tomará la forma

$$e^{ix} = \mathrm{C}(x) + i\mathrm{S}(x).$$

Si damos a x el valor 0, tendremos que :

$$\mathrm{C}(0) = 1\,; \qquad \mathrm{S}(0) = 0$$

propiedad que sabemos existe en las funciones trigonométricas ordinarias.

Si diferenciamos la primera tendremos que :

$$\frac{d\mathrm{C}(x)}{dx} = -2\frac{x^2}{|\underline{2}} + 4\frac{x^3}{|\underline{4}} - 6\frac{x^5}{|\underline{6}} + \cdots$$

$$= -\left(x - \frac{x^3}{|\underline{3}} + \frac{x^5}{|\underline{5}} \cdots\right) = -\mathrm{S}(x)$$

y análogamente :

$$\frac{d\mathrm{S}(x)}{dx} = 1 - \frac{3x^2}{|\underline{3}} + \frac{5x^4}{|\underline{5}} \cdots = \mathrm{C}(x)$$

también propiedad de las funciones trigonométricas ordinarias. La verificación de la relación fundamental conocida

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

puede hacerse sin presuponer nada, independientemente de toda construcción geométrica, y simplemente operando con la función dada; en efecto,

$$\frac{d}{dx}\left[\overline{C(x)}^2 + \overline{S(x)}^2\right] = \frac{d}{dx}\overline{C(x)}^2 + \frac{d}{dx}\overline{S(x)}^2 = 2C(x)\frac{d}{dx}C(x) +$$

$$+ 2S(x)\frac{d}{dx}S(x) = -2C(x)\,S(x) + 2S(x)\,C(x) = 0$$

luego

$$\overline{C(x)}^2 + \overline{S(x)}^2 = \text{constante} = K^2.$$

Para determinar el valor de la constante K, demos a x el valor 0 y tendremos

$$\overline{C(0)}^2 + \overline{S(0)}^2 = 1$$

o sea finalmente

$$\overline{C(x)}^2 + \overline{S(x)}^2 = 1.$$

También hubiéramos podido observar que

$$\overline{C(x)}^2 + \overline{S(x)}^2 = [C(x) + iS(x)]\,[C(x) - iS(x)] = e^{ix} \,.\, e^{-ix} = 1.$$

De la relación $\overline{C(x)}^2 + \overline{S(x)}^2 = 1$, deducimos que $C(x)$ y $S(x)$ son siempre menores que 1.

Si consideramos la expresión

$$C(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{\underline{|4}} - \frac{x^6}{\underline{|6}} + \cdots$$

y la igualamos a cero, tendremos una ecuación de grado infinito; si vamos procediendo por aproximaciones sucesivas, tendremos:

Primera aproximación:

$$1 - \frac{x^2}{2} = 0 \qquad \therefore \qquad x = \sqrt{2} = 1{,}41421.$$

Segunda aproximación:

$$1 - \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} = 0.$$

$$x^4 - 12x^2 + 24 = 0.$$

$$x = \sqrt{6 + \sqrt{12}} = \sqrt{6 \pm 2\sqrt{3}} = \sqrt{6 - 3{,}4641} = \sqrt{2{,}5359} = 1{,}59245.$$

Tercera aproximación:

$$1 - \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} - \frac{x^6}{\underline{|6}} = 0.$$

$$x^6 - 30x^4 + 360x^2 - 720 = 0.$$

$$x = 1,5699.$$

De la primera sacamos : $2x = 2,82841.$
De la segunda sacamos : $2x = 3,1849.$
De la tercera sacamos : $2x = 3,1398.$

Los valores son aproximados por exceso y por defecto, alternativamente, pero hay siempre un valor real de x para cada una de las ecuaciones, comprendido entre 1,414 y 1,592 y creciendo el número de términos que consideremos, como el resto, o último término, tiende hacia cero, existirá un valor finito de x, para el cual se verifica que el valor de $C(x)$ será igual á 0 ; llamándolo $\frac{\pi}{2}$, tendremos que :

$$C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

y como

$$\overline{C\left(\frac{\pi}{2}\right)}^2 + \overline{S\left(\frac{\pi}{2}\right)}^2 = 1$$

se tiene

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

de lo cual se deduce igualmente que

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = C\left(\frac{\pi}{2}\right) + iS\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i = i$$

$$e^{ix + i\frac{\pi}{2}} = e^{ix} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = ie^{ix}$$

$$e^{ix + i\pi} = e^{ix}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = i^2 \cdot e^{ix} = - e^{ix}.$$

$$e^{ix + \frac{3i\pi}{2}} = e^{ix} \cdot e^{i\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = - ie^{ix}$$

$$e^{ix + 2i\pi} = e^{ix}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^4 = i^4 e^{ix} = e^{ix}$$

o sea

$$e^{ix} = e^{i(x + 2\pi)}$$

luego la función e^{ix} es periódica, siendo su período 2π.

Desarrollando los valores anteriores, tendremos que por definición :

$$e^{ix} = C(x) + iS(x)$$

y luego por los cálculos hechos antes

$$e^{i\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = ie^{ix} = iC(x) - S(x) = C\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + iS\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$e^{i(x + \pi)} = - e^{ix} = - C(x) - iS(x) = C(x + \pi) + iS(x + \pi)$$

$$e^{i\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)} = -ie^{ix} = -iC(x) + S(x) = C\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) + iS\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$e^{i(x+2\pi)} = e^{ix} = C(x) + iS(x) = C(x+2\pi) + iS(x+2\pi).$$

Identificando los dos miembros de las últimas igualdades tendremos :

$$C\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -S(x) \qquad S\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = C(x)$$

$$C(x+\pi) = -C(x) \qquad S(x+\pi) = -S(x)$$

$$C\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) = S(x) \qquad S\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) = -C(x)$$

$$C(x+2\pi) = C(x) \qquad S(x+2\pi) = S(x).$$

Luego también las funciones $C(x)$ y $S(x)$ son periódicas y con el mismo período.

Combinando los resultados de estos dos últimos grupos de igualdades, tendremos :

$$C\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -S(x)$$

$$C(x+\pi) = -S\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -C(x)$$

$$C\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) = -C\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = S(x)$$

$$C(x+2\pi) = S\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = C(x)$$

y también :

$$S\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = C(x)$$

$$S(x+\pi) = C\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -S(x)$$

$$S\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) = -S\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -C(x)$$

$$S(x+2\pi) = -C\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = S(x)$$

todo lo cual concuerda exactamente con las propiedades de las fórmulas conocidas por la trigonometría elemental.

Con la misma facilidad se pueden demostrar las fórmulas de adición, porque

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} = [C(x) + iS(x)][C(y) + iS(y)] =$$
$$= C(x)\,C(y) - S(x)\,S(y) + i[C(x)\,S(y) + C(y)\,S(x)]$$

y como por definición :

$$e^{i(x+y)} = C(x+y) + iS(x+y)$$

se deduce, identificando las partes reales y las imaginarias de los segundos miembros que

$$C(x+y) = C(x)\,C(y) - S(x)\,S(y)$$

$$S(x+y) = S(y)\,C(x) + C(y)\,.\,S(x).$$

Luego, podemos asegurar finalmente, que las funciones $S(x)$ y $C(x)$, definidas por consideraciones puramente analíticas, independientemente de toda construcción geométrica, son idénticas a las funciones trigonométricas circulares sen x y cos x.

Volvamos a tomar ahora el concepto de *distancia,* definido antes por la relación

$$d_{12} = +\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2}.$$

Este valor hace parte evidentemente del cuerpo K, para demostrarlo, basta observar su forma.

Dados dos seudosegmentos con el triplete $P_1 \equiv (a_1, b_1, c_1)$ común, y las extremidades $P_2 \equiv (a_2, b_2, c_2)$ y $P_3 \equiv (a_3, b_3, c_3)$, definiremos el valor de cos φ_1 por la relación :

$$d_{12}\,d_{13}\cos\varphi_1 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) + (b_2 - b_1)(b_3 - b_1) + (c_2 - c_1)(c_3 - c_1).$$

Ya hemos definido la función cos φ_1. El mismo φ_1 no forma en general parte del cuerpo K, pero sí los números cos φ_1, sen φ_1 y tang φ_1 $= \dfrac{\text{sen}\,\varphi_1}{\cos\varphi_1}$.

De las igualdades últimamente escritas, deducimos que :

$$\cos\varphi_1 = \frac{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) + (b_2 - b_1)(b_3 - b_1) + (c_2 - c_1)(c_3 - c_1)}{d_{12}d_{13}} =$$

$$= \frac{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) + (b_2 - b_1)(b_3 - b_1) + (c_2 - c_1)(c_3 - c_1)}{\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2}\sqrt{(a_1 - a_3)^2 + (b_1 - b_3)^2 + (c_1 - c_3)^2}}$$

si designamos, para abreviar, con una sola letra mayúscula y doble índice las diferencias

$$a_j - a_h = A_{hj}\,...,$$

tendremos :

$$\cos\varphi_1 = \frac{A_{12}A_{13} + B_{12}B_{13} + C_{12}C_{13}}{\sqrt{A_{12}^2 + B_{12}^2 + C_{12}^2}\sqrt{A_{13}^2 + B_{13}^2 + C_{13}^2}}.$$

Para hallar el valor máximo de cos φ_1, comparemos el numerador con el denominador.

Partiendo de la identidad

$$(a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2=$$
$$=(a\beta-b\alpha)^2+(a\gamma-c\alpha)^2+(b\gamma-c\beta)^2$$

que aplicada al caso presente da :

$$[A_{12}^2+B_{12}^2+C_{12}^2][A_{13}^2+B_{13}^2+C_{13}^2]-[A_{12}A_{13}+B_{12}B_{13}+C_{12}C_{13}]^2=$$
$$=[A_{12}B_{13}-A_{13}B_{12}]^2+[A_{12}C_{13}-A_{13}C_{12}]^2+[B_{12}C_{13}-B_{13}C_{12}]^2.$$

El primer miembro es la diferencia de los cuadrados del denominador y del numerador; y como el segundo es una suma de cuadrados y por lo tanto positivo, resulta que el denominador es siempre mayor que el numerador, luego

$$\cos\varphi<1.$$

Por la misma forma de las cantidades subradicales, se ve que el número cos φ es real, lo mismo que sen φ, que también es siempre menor que la unidad, haciendo, por lo tanto, ambos parte del mismo cuerpo K.

17. Sean ahora las expresiones

$$(x-a_1):(y-b_1):(z-c_1)=u_2:v_2:w_2=$$
$$=(a_2-a_1):(b_2-b_1):(c_2-c_1)$$

$$(x-a_1):(y-b_1):(z-c_1)=u_3:v_3:w_3=$$
$$=(a_3-a_1):(b_3-b_1):(c_3-c_1)$$

que pueden ser consideradas como definiendo las pseudo rectas P_1P_2 y P_1P_3 (fig. 46). De ellas se deduce :

$$\varkappa u_2=a_2-a_1 \qquad \lambda u_3=a_3-a_1$$
$$\varkappa v_2=b_2-b_1 \qquad \lambda v_3=b_3-b_1$$
$$\varkappa w_1=c_2-c_1 \qquad \lambda w_3=c_3-c_1$$

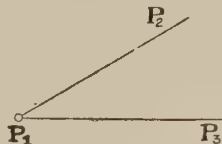


Fig. 46

siendo $\varkappa$ y λ, dos factores cualesquiera de proporcionalidad.

Recordando la expresión que dimos para la distancia entre dos puntos, tendremos :

$$d_{12}=\sqrt{(a_2-a_1)^3+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}=\varkappa\sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2}$$

y análogamente

$$d_{13} = \lambda\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}.$$

Llevando estos valores a la expresión del cos φ, tenemos :

$$\cos\varphi = \frac{\varkappa\lambda\,(u_2u_3 + v_2v_3 + w_2w_3)}{\varkappa\lambda\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}}$$

y como los valores de $\varkappa$ y de λ pueden ser positivos o negativos, con tal que d_{12} y d_{13} sean positivos, resultan para cos φ, los dos valores :

$$\cos\varphi = \pm\frac{u_2u_3 + v_2v_3 + w_2w_3}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}}.$$

Podremos, pues, decir que *dos rectas determinan dos ángulos, cuyos cosenos son iguales y de signo contrario;* uno de los ángulos será φ y el otro $\varphi + \pi$ (fig. 47), pues ya vimos por la periodicidad de las funciones C(x) y S(x) que

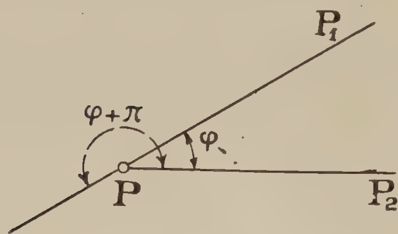


Fig. 47

$$C(x) = -C(x + \pi).$$

Pero si se pone la condición de que $\varphi < \pi$, *dos segmentos de rectas,* determinan un solo ángulo φ.

18. Definidos ya los ángulos y algunas de sus funciones, puede seguirse analíticamente definiendo, o más bien construyendo toda la trigonometría.

Tomemos tres tripletes o pseudo puntos :

$$P_1 \equiv (a_1b_1c); \qquad P_2 \equiv (a_2b_2c_2); \qquad P_3 \equiv (a_3b_3c_3)$$

tendremos definidos tres ángulos :

$$\sphericalangle P_3P_1P_2 \equiv \varphi_1; \qquad \sphericalangle P_1P_2P_3 \equiv \varphi_2; \qquad \sphericalangle P_2P_3P_1 \equiv \varphi_3$$

y las tres distancias :

$$P_2P_3 \equiv d_{23} = d_1; \qquad P_3P_1 \equiv d_{31} = d_2; \qquad P_1P_2 \equiv d_{12} = d_3$$

que serán los seis elementos de un triángulo.

Hagamos uso de las relaciones empleadas para definir el *coseno :*

$$d_{13}d_{12}\cos\varphi_1 = d_2d_3\cos\varphi_1 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) +$$
$$+ (b_2 - b_1)(b_3 - b_1) + (c_2 - c_1)(c_3 - c_1)$$

$$d_3 d_1 \cos \varphi_2 = (a_3 - a_2)(a_1 - a_2) + (b_3 - b_2)(b_1 - b_2) + (c_3 - c_2)(c_1 - c_2)$$

$$d_1 d_2 \cos \varphi_3 = (a_1 - a_3)(a_2 - a_3) + (b_1 - b_3)(b_2 - b_3) + (c_1 - c_3)(c_2 - c_3)$$

Sumando las dos últimas, el primer miembro se podrá escribir :

$$d_1 (d_2 \cos \varphi_3 + d_3 \cos \varphi_2)$$

en cuanto al segundo, sumando los términos que tienen las mismas letras, tendremos, por ejemplo, para los primeros :

$$(a_3 - a_2)(a_1 - a_2) + (a_1 - a_3)(a_2 - a_3) =$$
$$(a_2 - a_3)[a_1 - a_3 - a_1 + a_2] = (a_2 - a_3)^2$$

entonces, quedará :

$$d_1 (d_2 \cos \varphi_3 + d_3 \cos \varphi_2) = (a_2 - a_3)^2 + (b_2 - b_3)^2 + (c_2 - c_3) = d_1^2$$

y finalmente :

$$d_1 = d_2 \cos \varphi_3 + d_3 \cos \varphi_2,$$

lo que expresa *geométricamente* que *en un triángulo, un lado es igual a la suma de las proyecciones de los otros dos* (fig. 48).

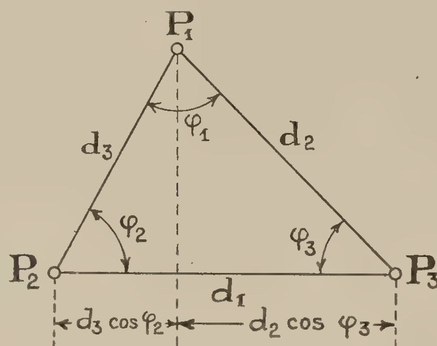


Fig. 48

Aplicando la fórmula anterior a los otros dos lados, tendremos, por simple permutación de letras :

$$d_2 = d_3 \cos \varphi_1 + d_1 \cos \varphi_3$$

$$d_3 = d_1 \cos \varphi_2 + d_2 \cos \varphi_1.$$

Sacando de la primera el valor de $\cos \varphi_2$ y de la segunda el de $\cos \varphi_1$, tendremos :

$$\cos \varphi_2 = \frac{d_1 - d_2 \cos \varphi_3}{d_3}$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{d_2 - d_1 \cos \varphi_3}{d_3}$$

que substituídos en la tercera dan

$$d_3 = d_1 \frac{d_1 - d_2 \cos \varphi_3}{d_3} + d_2 \frac{d_2 - d_1 \cos \varphi_3}{d_3}$$

$$d_3^2 = d_1 (d_1 - d_2 \cos \varphi_3) + d_2 (d_2 - d_1 \cos \varphi_3)$$

o

$$d_3^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos \varphi_3$$

que es el teorema bien conocido en geometría euclideana que da el valor del cuadrado del lado de un triángulo, y que para $\varphi = \frac{\pi}{2}$, da el teorema de Pitágoras.

El último valor obtenido, podemos sucesivamente transformarlo en

$$d_3^2 - d_1^2 - d_2^2 = 2d_1d_2 \cos \varphi_3$$

$\therefore$

$$(d_3^2 - d_1^2 - d_2^2)^2 = 4d_1^2d_2^2 \cos^2 \varphi_3 = 4d_1^2d_2^2 (1 - \text{sen}^2 \varphi_3) =$$
$$= 4d_1^2d_2^2 - 4d_1^2d_2^2 \text{ sen}^2 \varphi_3.$$

$\therefore$

$$4d_1^2d_2^2 \text{ sen}^2 \varphi_3 = 4d_1d^2 - (d_3^2 - d_1^2 - d_2^2)^2 =$$
$$= (2d_1d_2 + d_3^2 - d_1^2 - d_2^2)(2d_1d_2 - d_3^2 + d_1^2 + d_2^2) =$$
$$= [d_3^2 - (d_1 - d_2)^2][(d_1 + d_2)^2 - d_3^2] =$$
$$= (d_1 + d_2 + d_3)(d_1 + d_2 - d_3)(d_3 + d_1 - d_2)(d_3 - d_1 + d_2),$$

y si llamamos para abreviar

$$d_1 + d_2 + d_3 = 2s$$

$$4d_1^2d_2^2 \text{ sen}^2 \varphi_3 = (2s - 2d_3)(2s - 2d_2)(2s - 2d_1) =$$
$$= 16s (s - d_1)(s - d_2)(s - d_3)$$

$$2d_1d_2 \text{ sen } \varphi_3 = 4\sqrt{s (s - d_1)(s - d_2)(s - d_3)}.$$

19. Llamando S a la cantidad

$$2d_1d_2 \text{ sen } \varphi_3 = 4\text{S}.$$

Si permutamos los índices en el valor de S, éste no varía, lo que nos permite escribir entonces :

$$4\text{S} = 2d_1d_2 \text{ sen } \varphi_3 = 2d_1d_3 \text{ sen } \varphi_2 = 2d_2d_3 \text{ sen } \varphi_1$$

o lo que es lo mismo :

$$\text{sen } \varphi_1 : \text{sen } \varphi_2 : \text{sen } \varphi_3 = d_1 : d_2 : d_3,$$

que es el teorema de los senos de los tres ángulos de un triángulo, en geometría euclideana.

20. Si dividimos por d_1 la igualdad

$$d_1 = d_2 \cos \varphi_3 + d_3 \cos \varphi_2$$

resulta :

$$1 = \frac{d_2}{d_1} \cos \varphi_3 + \frac{d_3}{d_1} \cos \varphi_2 = \frac{\operatorname{sen} \varphi_2}{\operatorname{sen} \varphi_1} \cos \varphi_3 + \frac{\operatorname{sen} \varphi_3}{\operatorname{sen} \varphi_1} \cos \varphi_2$$

$$\operatorname{sen} \varphi_1 = \operatorname{sen} \varphi_2 \cos \varphi_3 + \operatorname{sen} \varphi_3 \cos \varphi_2 = \operatorname{sen} (\varphi_2 + \varphi_3),$$

pues ya vimos antes que las funciones $C(x)$, $S(x)$, obedecían a las fórmulas de adición de las funciones trigonométricas.

Permutando los índices, podremos escribir :

$$\operatorname{sen} \varphi_2 = \operatorname{sen} (\varphi_1 + \varphi_3)$$

$$\operatorname{sen} \varphi_3 = \operatorname{sen} (\varphi_1 + \varphi_2)$$

de donde resulta que sea :

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi,$$

porque entonces

$$\operatorname{sen} \varphi_3 = \operatorname{sen} [\pi - (\varphi_1 + \varphi_1)] = \operatorname{sen} (\varphi_1 + \varphi_2).$$

También se puede admitir :

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 + \varphi_3 \\ \varphi_2 &= \varphi_1 + \varphi_3 \\ \varphi_3 &= \varphi_1 + \varphi_2 \end{aligned}\right\} \text{ o sea } \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0,$$

y como los φ son números positivos, se requiere que :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0.$$

Veamos si es posible esta segunda hipótesis; aplicándola, en las fórmulas del § 18 que nos dan los valores de d_1, d_2, d_3, se tiene que

$$d_1 = d_2 = d_3 = 0$$

lo que obliga a que

$$d_1^2 = 0 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2$$

$\therefore$

$$a_2 = a_1$$

$$b_2 = b_1$$

$$c_2 = c_1$$

o sea que en vez de dos tripletes distintos, tenemos uno solo, contrariamente a nuestras hipótesis, luego queda solamente la otra hipótesis, compatible con las tres relaciones de los senos, es decir que

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi$$

o sea que : *la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos rectos,* enunciado equivalente al cuarto postulado de Euclides.

21. Los resultados anteriores hacen ver unánimemente. que los tripletes de números, permiten una perfecta aplicación de los axiomas de congruencia que forman el grupo tercero de Hilbert, y en base a ellos podríamos encontrar las demostraciones de los casos de igualdad de los triángulos.

También resulta que la suma de dos lados es mayor que el tercer lado, porque :

$$d_1 = d_2 \cos \varphi_3 + d_3 \cos \varphi_2$$

$$d_2 = d_3 \cos \varphi_1 + d_1 \cos \varphi_3$$

$$d_1 - d_2 = (d_2 - d_1) \cos \varphi_3 + d_3 (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)$$

$$(d_1 - d_2)(1 + \cos \varphi_3) = d_3 (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1).$$

De esto se deduce por sencillas transformaciones trigonométricas

$$d_1 - d_2 < d_3$$

$$d_1 < d_2 + d_3.$$

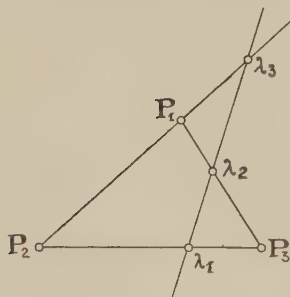


Fig. 49

De aquí podemos fundar la definición de una seudolínea quebrada más larga que la seudorecta determinada entre dos seudopuntos y llegar a la noción de que la seudorecta es el *camino más corto* entre dos puntos.

22. En páginas anteriores habíamos encontrado los valores de λ_1, λ_2, λ_3, en que una recta *s*, corta a los tres lados de un triángulo (fig. 49), y vimos que $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$.

Recordemos brevemente que :

$$\frac{x - a_1}{x - a_2} = \frac{y - b_1}{y - b_2} = \frac{z - c_1}{z - c_2} = \lambda_3$$

$$x_3 - a_1 = \lambda_3 (x_3 - a_2)$$

$$x_3 - \lambda_3 x_3 = a_1 - \lambda_3 a_2$$

$$x_3 = \frac{a_1 - \lambda_3 a_2}{1 - \lambda_3}.$$

Si $\lambda_3 = 1$, $x_3 = \dfrac{a_1 - a_2}{0} = \infty$, y el punto correspondiente a λ_3 no existe, no hay valor numérico de triplete que dé este valor, pero sin embargo, si admitimos por un momento $\lambda_3 = 1$, resulta $\lambda_1\lambda_2 = 1$, y si nos damos $\lambda_2 \neq 1$, es decir un triplete, o seudopunto efectivo λ_2, resulta otro valor λ_1 también distinto de la unidad, pues

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2}.$$

La seudorecta determinada por $\lambda_1\lambda_2$, que no corta a la seudorecta P_2P_1, pues el λ_3 está en el infiníto, se llamará *paralela,* a la seudorecta P_1P_2, llevada por λ_1 o por λ_2 y como no tiene punto común determinable con P_1P_2, se deduce que *por un punto se puede trazar una paralela y una sola a otra recta dada,* lo que constituye el famoso postulado de Euclides, y el axioma IV de Hilbert.

23. También habíamos visto que :

$$x_1 = \frac{a_2 - \lambda_1 a_3}{1 - \lambda_1}; \qquad x_2 = \frac{a_3 - \lambda_2 a_1}{1 - \lambda_2}; \qquad x_3 = \frac{a_1 - \lambda_3 a_2}{1 - \lambda_3};$$

y admitiendo $\lambda_1\lambda_2 = 1$,

$$x_1 = \frac{a_2 - \lambda_1 a_3}{1 - \lambda_1}; \qquad x_2 = \frac{a_3 - \dfrac{a_1}{\lambda_1}}{1 - \dfrac{1}{\lambda_1}} = \frac{a_1 - \lambda_1 a_3}{1 - \lambda_1}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{a_1 - \lambda_1 a_3}{1 - \lambda_1} - \frac{a_2 - \lambda_1 a_3}{1 - \lambda_1} = \frac{a_1 - a_2}{1 - \lambda_1},$$

y de la misma manera,

$$y_2 - y_1 = \frac{b_1 - b_2}{1 - \lambda_1}$$

$$z_2 - z_1 = \frac{c_1 - c_2}{1 - \lambda_1}.$$

Así, pues, la paralela llevada por un punto (x_1, y_1, z_1) a P_1P_2, recta cuya ecuación es

$$(x - a_1) : (y - b_1) : (z - c_1) = (a_2 - a_1) : (b_2 - b_1) : (c_2 - c_1)$$

será :

$$(x - x_1) : (y - y_1) : (z - z_1) = (a_2 - a_1) : (b_2 - b_1) : (c_2 - c_1)$$

en esta expresión;

x, y, z, vienen a ser las coordenadas corrientes;

x_1, y_1, z_1, las coordenadas del punto por el cual está trazada la paralela;

$\left.\begin{matrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \end{matrix}\right\}$ las coordenadas de los dos puntos que determinan la recta a la cual la otra es paralela.

Podríamos hacer ver fácilmente, que el ángulo formado por dos paralelas, es tal que $\cos \varphi = 1$.

En efecto : tomemos la ecuación de dos rectas cualesquiera,

$$(x - a_1) : (y - b_1) : (z - c_1) = (a_2 - a_1) : (b_2 - b_1) : (c_2 - c_1) =$$
$$= u_2 : v_2 : w_2$$

$$(x - a_1) : (y - b_1) : (z - c_1) = (a_3 - a_1) : (b_3 - b_1) : (c_3 - c_1) =$$
$$= u_3 : v_3 : w_3$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{u_2 u_3 + v_2 v_3 + w_2 w_3}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}} .$$

si las rectas son paralelas,

$$u_2 = u_3; \qquad v_2 = v_3 \qquad w_2 = w_3,$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{3u_2^2}{\sqrt{3u_2^2}\sqrt{3u_2^2}} = 1$$

o sea, que el ángulo formado por dos rectas paralelas es nulo, puesto que de $C(x) = 1$, se deduce $x = 0$.

24. También se deduce de aqui inmediatamente que los ángulos de varias paralelas con una recta dada son todos iguales.

Habíamos obtenido

$$x_1 = \frac{a_2 - \lambda_1 a_3}{1 - \lambda_1}; \qquad x_2 = \frac{a_3 - \lambda_2 a_1}{1 - \lambda_2}; \qquad x_3 = \frac{a_1 - \lambda_3 a_2}{1 - \lambda_3}.$$

Hagamos variar a λ_3, para lo cual escribamos $\lambda_3 = 1 + \alpha$

$$x_3 = \frac{a_1 - a_2 - \alpha a_2}{- \alpha}.$$

A medida que α disminuye, el valor de x_3 aumenta, y en general, aumentarán los valores de los tres números que forman un triplete cualquiera (x_1, y_1, z_1), tendremos números cada vez mayores, llegando en el límite a adquirir valores que llamaremos *infinitos*, ∞, mayores que cualquier cantidad dada por grande que sea, pero que están siempre entre sí en una relación finita y determinada

$$(a_1 - a_2) : (b_1 - b_2) : (c_1 - c_2) = x_\infty : y_\infty : z_\infty.$$

Si se admite, que un triplete de tres números infinitamente grandes en relación determinada unos con otros, sea también un triplete y uno solo, tendremos que :

Todas las rectas paralelas a (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) llevadas por un triplete determinado, pasan por un mismo punto infinitamente lejano del triplete que sirvió para determinarlas.

25. Para dos puntos cualesquiera, S′ y S″, en los cuales los valores de λ_3 sean respectivamente K′ y K″, tendremos :

$$x_3' = \frac{a_1 - K'a_2}{1 - K'} \qquad x_3'' = \frac{a_1 - K''a_2}{1 - K''}$$

$$x_3' - x_3'' = \frac{a_1 - K'a_2}{1 - K'} - \frac{a_1 - K''a_2}{1 - K''} =$$

$$= \frac{a_1 - K''a_1 - K'a_2 + K'K''a_2 - a_1 + K'a_1 + K''a_2 - K'K''a_2}{(1 - K')(1 - K'')} =$$

$$= \frac{K'a_1 + K''a_2 - K''a_1 - K'a_2}{(1 - K')(1 - K'')} = \frac{(a_1 - a_2)(K' - K'')}{(1 - K')(1 - K'')} =$$

$$= \frac{K' - K''}{(1 - K')(1 - K'')}(a_1 - a_2) = K(a_1 - a_2).$$

De la misma manera deduciríamos

$$y_3' - y_3'' = K(b_1 - b_2)$$

$$z_3' - z_3'' = K(c_1 - c_2)$$

y la distancia entre los puntos S′ y S″, será :

$$d = \sqrt{(x_3' - x_3'')^2 + (y_3' - y_3'')^2 + (z_3' - z_3'')^2} =$$

$$= K\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2} = Kd_3,$$

dejemos el punto S′ fijo. pero eligiendo uno tal que $K' \neq 1$, y hagamos

variar el otro punto S″, para ver cómo varía la distancia : recordando el valor de K, tenemos que :

$$d = \mathrm{K} d_3 = \frac{\mathrm{K}' - \mathrm{K}''}{(1 - \mathrm{K}')(1 - \mathrm{K}'')} d_3$$

poniendo $\mathrm{K}'' = 1 + a$

$$d = \frac{\mathrm{K}' - 1 - \alpha}{(\mathrm{K}' - 1)\, \alpha}.$$

Si K″ tiende hacia la unidad, o sea si α tiende hacia cero, la distancia d tiende hacia un valor infinito, haciéndose mayor que cualquier distancia dada, por grande que sea; tendremos pues que :

El punto impropio, en el infinito de una recta, está a una distancia infinitamente grande de todos los puntos propios de la recta.

26. Con las indicaciones anteriores, damos por terminado el estudio lógico de la geometría de los tripletes, habiendo visto que acepta todos los axiomas de Euclides.

Respecto a los de continuidad, las dificultades son puramente de orden aritmético y es conocido cómo se trata de vencerlas por las consideraciones del límite.

Luego, como en aritmética, no hay errores lógicos, tampoco los puede haber en geometría euclideana, pues los axiomas no contienen contradicciones lógicas y son independientes entre sí.

De aquí se deduce también, que lo mismo debe suceder con las geometrías no euclideanas, pues si en ellas hubiera errores, resultarían estos por inversión en la geometría euclideana, y ya hemos visto que ésta no los tiene.

En resumen : *Es imposible demostrar lógicamente la falsedad de ninguna de las tres geometrías; todas son igualmente lógicas y exactas; y demostrar que una no lo es, sería demostrar que ninguna de las tres lo es.*

CAPÍTULO VIII

Teoría de la medición

En lo que precede hicimos una exposición de la teoría de las tres geometrías : hiperbólica, parabólica y elíptica, sin considerar de más cerca la medición de los segmentos de rectas no euclideanas; medir distancias nos resulta muy claro en la geometría euclideana, y se nos

impone ahora en consecuencia la siguiente pregunta : ¿ cómo se transforma esta noción, este concepto en las otras geometrías ?

Para contestar esa pregunta, es menester recordar que hemos sentado al principio (cap. II) el axioma de Arquimedes V_1, que admite que se puede establecer sobre una recta una serie de puntos equidistantes : nos falta pues saber cómo esto se puede efectuar y, por consiguiente, qué es lo que debemos entender por « distancias iguales », y qué por « suma de dos distancias » en una recta.

Sin este complemento, se podría objetar a las conclusiones precedentes que en la geometría euclídea sabemos medir, pero no en las

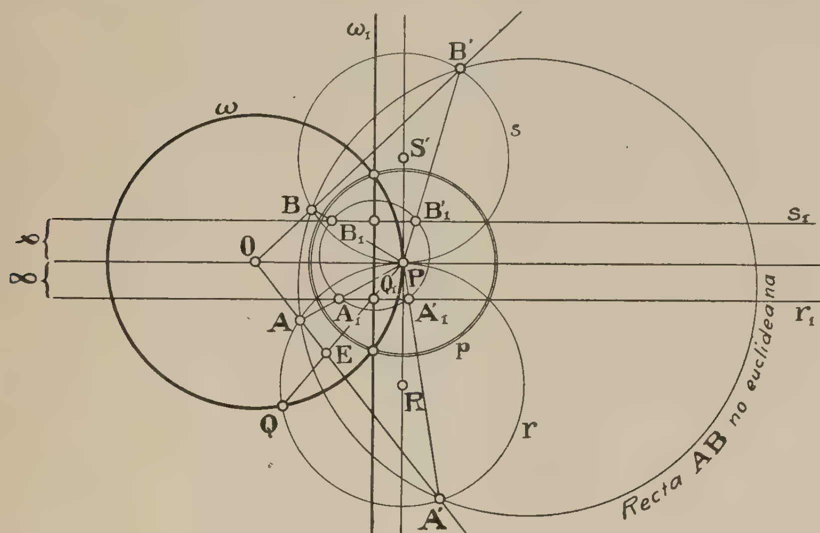


Fig. 50

otras. Base de la teoría de la medición es la de la simetría, que luego nos permitirá establecer aquella serie de puntos equidistantes del capítulo II, axioma V_1.

Además, una de las dificultades de la interpretación de las geometrías no euclideanas está en la representación intuitiva de los puntos inversos de puntos dados respecto al círculo director de esa interpretación. Por ejemplo, en la geometría hiperbólica, si ω es el círculo director, a dos puntos A, B, corresponden dos inversos A′, B′, y si ω es el círculo en el infinito, ¿ qué representación cómoda, intuitiva, podemos hacernos de A′ y B′ ?

Todo ello también se vincula con la cuestión de una simetría.

Para aclarar estos conceptos procedemos como sigue (ver fig. 50) :

Por el punto A hago pasar una recta, es decir su representación que es un círculo r, de centro R, ortogonal a ω. Este círculo cortará a ω en dos puntos P y Q y PQ será la polar del centro O de ω respecto a r, pues OP y OQ son tangentes por ser normales a RP y RQ. El inverso A′ de A está en la segunda intersección de OA con el círculo r. Tomo uno de los dos puntos P o Q, por ejemplo P, como centro de un círculo p de radio cualquiera, con tal que corte a ω, y hago la inversión de toda la figura respecto a P. La figura inversa de ω es la cuerda común ω_1 de ω y p; la inversa de r, la cuerda común r_1 de r y p; luego r y ω_1 son rectas *ortogonales* por serlo r y ω, y se cortan en el centro radical de ω, r y p; quiere decir que la recta $\omega r \equiv$ PQ pasa por el punto Q_1 común a ω_1 y r_1. Ademas, r_1 cuerda común de r y p es normal a la central de r y p, y esta central es la tangente PR en P al círculo ω; luego r_1 es paralela a OP.

Sea E el punto en que OAA′ corta a PQ; como esta es la polar de O respecto a r, se tiene

$$(AA'EO) = -1.$$

Si desde P como centro proyectamos esta cuaterna sobre r_1 obtenemos la cuaterna $(A_1A_1'E_1O_1)$; pero OP es paralela con r_1, luego $O_1 \equiv O_\infty$; E_1 está sobre PQ que pasa por P, luego $E_1 \equiv Q_1$ y por consiguiente

$$(A_1A_1'Q_1Q_\infty) = -1$$

o sea

$$A_1Q_1 = Q_1A_1'$$

y vemos que Q_1 es el punto medio de la normal A_1A_1' a la recta ω_1.

Repitiendo el mismo raciocinio para un otro par de puntos inversos B, B′, trazaremos el círculo s ortogonal a ω que pase por B y luego por B′, y obtendremos como antes que ω_1 es la mediatriz del segmento B_1B_1'.

Finalmente, nos resulta que si a una figura cualquiera ABCD etc., corresponde en la geometría de círculo director ω, la inversa A′B′C′D′ etc., la representación más intuitiva y sencilla que nos podemos hacer de ello es una simetría de $A_1B_1C_1$ etc. respecto a un eje ω_1. Por esta razón muchos autores dicen brevemente : simetría respecto al círculo ω; y en el sentido supuesto se ve que figuras inversas gozan de todas las propiedades fundamentales de la simetría o « reflexión » aún cuando en esta transformación a una recta AB no corresponde la recta A_1B_1 sino la circunferencia ortogonal a ω_1 que pasa por A_1 y B_1.

Esta propiedad nos permite construir directamente el simétrico de un punto A situado sobre una recta *r*, respecto de un eje *e* perpendicular en A a esa recta. Si tomamos un segmento A_0A_1 y buscamos A_2 simétrico de A_0 respecto al eje e_1 normal a *r* en A_1, tendremos, en el sentido ordinario de la palabra, que el segmento $A_0A_1 = A_1A_2$; si repetimos esta misma operación sobre el punto A_1 respecto al eje e_2 normal a *r* en A_2, obtenemos A_3, y vamos así construyendo la serie $A_0A_1A_2A_3$ etc. de puntos equidistantes, como lo indican las figuras 51 y 52, en geometría hiperbólica, mediante el círculo director ω. La primera no necesita gran explicación, pues solo es una repetición de

Fig. 51

la figura 50. Dado A_0A_1, se traza en A_1 la tangente al círculo (seudorecta hiperbólica) *r*; corta al eje radical PQ de los círculos ω y *r* en C_1 centro del círculo ortogonal e_1, de radio C_1A_1, que es la seudorecta normal en A_1 a la seudorecta *r*. Se une C_1A_0 que corta al círculo *r* en A_2, inverso, o sea simétrico, de A_1 respecto al círculo e_1, y se va repitiendo indefinidamente esta misma construcción.

Se ve inmediatamente que si vamos de A_0 hacia A_1 en el sentido A_0A_1 obtenemos una serie infinita de puntos A_0, A_1, A_2, ..., A_n, con un punto de acumulación P al cual nunca alcanzamos; como límite, este punto P dista pues un número infinito de pasos iguales de cualquier punto A_0 de la recta *r*; digamos caminando desde A_0 hacia la izquierda. Si camináramos hacia la derecha el punto de acumulación

sería visiblemente Q, infinito derecho. Así cada recta tiene dos extremos P y Q, uno a la derecha y otro a la izquierda : un infinito a la derecha, otro a la izquierda; toda paralela a la recta *r*, corta a ésta sobre el círculo ω, pues allí ambas rectas hacen, como vimos, un ángulo nulo por ser ambas normales a ω. Hay, pues, dos paralelas, una a la izquierda. otra a la derecha, que van al infinito a encontrar *r* bajo ángulo nulo. Todo esto ya lo vimos en el capítulo VI.

La división A_0', A_1', A_2', ..., es inversa o sea simétrica de la anterior respecto de ω, y forma otra serie de puntos equidistantes.

Fig. 52

En la figura 52 todo esto se ve quiza mejor todavía; en ella tomamos como ω una recta (círculo de radio infinitamente grande euclideano). La construcción es la misma y la simetría de A_0, A_1, A_2, ..., con A_0', A_1', A_2', ..., es euclideana respecto de la recta ω. Lo demás como antes.

Ahora se nos presenta la cuestión : ¿cómo medir sobre una recta *r* la distancia de dos puntos?

El concepto de « distancia » es el de una propiedad de « dos puntos » que satisface las siguientes relaciones

1ª $$\overline{AB} = -\overline{BA}$$

2ª $$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

3° Si sumamos n distancias iguales $A_0A_1 = A_1A_0 = ... = A_{n-1}A_n$ tenemos

$$\overline{A_0A_n} = n \cdot \overline{A_0A_1}.$$

Hasta aquí las únicas invariantes que encontramos en una transformación inversa, que transforma una geometría en otra y debe transformar la noción de distancia conservando sus propiedades, es, por una parte, la relación anarmónica de cuatro puntos y por la otra, el círculo director de la inversión.

Lógico es entonces, o mejor dicho muy intuitivo es buscar para expresar la distancia A_0A_1 una cierta función de la relación anarmónica de los dos puntos A_0 y A_1 con otros dos que dependan del círculo ω; y no hay puntos más apropiados a primera vista para eso que los P y Q en que la recta $r = A_0A_1$ corte a ω.

Consideremos las figuras 51 y 52 en que, por simetría, por inversiones sucesivas respecto de los ejes e_1, e_2, e_3, ..., engendramos la serie de puntos equidistantes A_0, A_1, A_2, ... Estos simétricos son :

1° A_1 fijo (eje e_1) permuta A_0 en A_2 y P en Q, luego :

$$(A_0A_1PQ) = (A_2A_1QP).$$

2° A_2 fijo (eje e_2) permuta A_1 en A_3 y P en Q, luego :

$$(A_1A_2PQ) = (A_3A_2QP).$$

. . . .

$(n-1)$O A_{n-1} fijo (eje e_{n-1}) permuta A_{n-1} en A_n y P en Q, luego :

$$(A_{n-2}A_{n-1}PQ) = (A_nA_{n-1}QP).$$

Escrito explicitamente

$$\frac{A_0P}{A_0Q} \cdot \frac{A_1P}{A_1Q} = \frac{A_2Q}{A_2P} \cdot \frac{A_1Q}{A_1P} = \frac{A_1P}{A_1Q} \cdot \frac{A_2P}{A_2Q}.$$

Esta propiedad es general y se tiene

$$\frac{A_0P}{A_0Q} \cdot \frac{A_1P}{A_1Q} = \frac{A_1P}{A_1Q} \cdot \frac{A_2P}{A_2Q} = \frac{A_2P}{A_2Q} \cdot \frac{A_3P}{A_3Q} = ... = \frac{A_{n-1}P}{A_{n-1}Q} \cdot \frac{A_nP}{A_nQ}. \quad (a)$$

Si multiplicamos la primera relación (a) por si misma y la primera por la segunda, obtenemos unos productos iguales

$$\left(\frac{A_0P}{A_0Q} \cdot \frac{A_1P}{A_1Q}\right)^2 = \frac{A_0P}{A_0Q} \cdot \frac{A_2P}{A_2Q}.$$

Si elevamos la primera de (a) al cubo y multiplicamos la primera por la segunda y por la tercera resulta

$$\left(\frac{A_0P}{A_0Q} : \frac{A_1P}{A_1P}\right)^3 = \frac{A_0P}{A_0Q} : \frac{A_3P}{A_3Q}.$$

De igual modo

$$\left(\frac{A_0P}{A_0Q} : \frac{A_1P}{A_1Q}\right)^n = \frac{A_0P}{A_0Q} : \frac{A_nP}{A_nQ}.$$

Pero la distancia A_0A_n debe ser n veces A_0A_1, luego la función más sencilla de la relación anarmónica que nos da este resultado es el logaritmo

$$n \log (A_0A_1PQ) = \log (A_0A_nPQ)$$

y podemos ensayar como distancia

$$\overline{A_0A_n} = K \log (A_0A_nPQ) = Kn \log (A_0A_1PQ)$$

con lo cual está satisfecha la condición tercera.

Veamos cómo corresponde a la condición primera que antecede: tendremos

$$\overline{A_nA_0} = K \log (A_nA_0PQ) = K \log \left(\frac{A_nP}{A_nQ} : \frac{A_0P}{A_0Q}\right) =$$

$$= - K \log \left(\frac{A_0P}{A_0Q} : \frac{A_nP}{A_nQ}\right) = - \overline{A_0A_n}.$$

Luego también está satisfecha la primera condición.

Pasemos a la segunda

$$\overline{A_0A_i} + \overline{A_iA_n} = \overline{A_0A_n};$$

en efecto

$$\overline{A_0A_i} = K \log \left(\frac{A_0P}{A_0Q} : \frac{A_iP}{A_iQ}\right) = K \left[\log \frac{A_0P}{A_0Q} - \log \frac{A_iP}{A_iQ}\right]$$

$$\overline{A_iA_n} = K \log \left(\frac{A_iP}{A_iQ} : \frac{A_nP}{A_nQ}\right) = K \left[\log \frac{A_iP}{A_iQ} - \log \frac{A_nP}{A_nQ}\right]$$

$\therefore$

$$\overline{A_0A_i} + \overline{A_iA_n} = K \left[\log \frac{A_0P}{A_0Q} - \log \frac{A_nP}{A_nQ}\right] = K \log \left[\frac{A_0P}{A_0Q} : \frac{A_nP}{A_nQ}\right] = \overline{A_0A_n}.$$

La función elegida satisface pues a todas las condiciones del con-

cepto distancia. Podemos precisar el valor K tomando como unidad, por ejemplo, $\overline{A_0A_1} = 1$, por la condición

$$\overline{A_0A_1} = 1 = K \log \left[\frac{A_0P}{A_0Q} : \frac{A_1P}{A_1Q}\right] = K \log (A_0A_1PQ).$$

En resumen, en geometría hiperbólica :

La distancia entre dos puntos es proporcional al logaritmo de la relación anarmónica de estos dos puntos con los extremos de la recta, sus puntos en el infinito.

La unidad de distancia es K veces el logaritmo de la relación anarmónica de los puntos 0 y 1 con esos extremos; K depende del valor del sistema de logaritmos empleados.

Por consiguiente, en la geometría no euclideana hiperbólica, de Bolyai-Lobachevski, la distancia depende de la posición del segmento respecto al círculo ω, el círculo absoluto o sea el infinito.

En efecto si en la relación $A_0A_n = K \log (A_0A_nPQ)$ hacemos $A_n \equiv P$, por ejemplo, resulta

$$A_0P = K \log \left(\frac{A_0P}{A_0Q} : \frac{PP}{PQ}\right) = K \log \left(\frac{A_0P}{A_0Q} : \frac{0}{PQ}\right) = + \infty$$

si $A_n \equiv Q$

$$A_0Q = K \log \left(\frac{A_0P}{A_0Q} : \frac{QP}{0}\right) = K \log 0 = - \infty.$$

Todo esto coincide perfectamente con lo desarrollado en los varios capítulos que anteceden.

En geometría no euclideana elíptica, la de Riemann, el círculo ω es imaginario; la inversión nos da bien para A_1 como fijo, A_3 como inversa de A_0 pero más una simetría; las cantidades bajo logaritmo se hacen negativas, y como en todas las cuestiones de exponenciales y logaritmos, cuando el exponente es imaginario o el número negativo, entran a jugar su papel las *funciones circulares*.

Los que se interesan por estas cuestiones pueden consultar la misma obra original de Lobachevski, *Geometría imaginaria*, y muchísimas obras modernas que detallan ese formulismo.

Aquí nos basta exponer los principios de esta teoría de la medición, debida al geómetra inglés Arturo Cayley (1821-1895) en su *Sixth memoir on Quanties* (1859) desarrollada en 1871 por Félix Klein. Con ella todas las cuestiones suscitadas por el axioma V_1 y también los del V_2 quedan evacuados, pues sabemos medir y podemos establecer la

serie de puntos equidistantes del V_1; además nuestra geometría es completa, pues es bien sabido cómo el análisis deduce la noción de número irracional, y la de continuidad del conjunto numérico. al partir de la posibilidad de la serie de los números enteros y de la subdivisión de tales números en dos partes iguales : así podemos fijar por medición todos los puntos de una recta, del plano y del espacio.

CAPÍTULO IX

Comparación con la realidad

En un capítulo anterior hemos demostrado la imposibilidad teórica de distinguir entre las tres geometrías : parabólica, hiperbólica y elíptica, bajo la faz de la teoría, por el raciocinio puro; no podemos sacar deducciones que permitan afirmar que una de ellas corresponde à la realidad y las otras no; por el contrario, resulta que, demostrada la exactitud lógica (en sentido aritmético) de la geometría euclideana, queda al mismo tiempo demostrada esa misma exactitud para las otras dos.

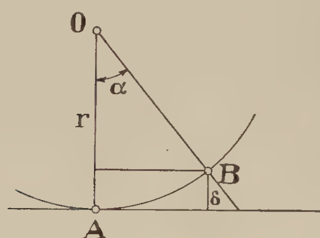


Fig. 53

Pero si nos referimos a las imágenes euclideanas de la geometría hiperbólica y de la elíptica, en cuya imagen, si las rectas de una aparecen como tales, las de las otras son círculos de ciertos haces, podemos también darnos cuenta fácilmente que, ni aun así, sería práctica experimentalmente posible, distinguir entre una recta tangente a tal círculo o seudorecta y este mismo círculo; quiero decir que la experiencia no puede procurarnos argumentos para hacer aquella distinción entre la realidad de varias geometrías.

Tomemos, por ejemplo, como radio del círculo que queremos comparar con una recta la distancia del Sol a Neptuno o sea unos 5.000.000.000 de kilómetros, resulta por ser (ver fig. 53).

$$\frac{\delta}{r} = 1 - \cos\alpha = \sim \frac{\alpha^2}{2}$$

$\therefore$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\delta}{r}}$$

y

$$AB = r\alpha,$$

que

$$AB = \sqrt{2\delta r},$$

que para $r = 5 \cdot 10^9$ km. $= 5 \cdot 10^{15}$ mm. y δ tan solo igual a 10^{-3} milímetros da

$$AB = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 10^{15} \cdot 10^{-3}} \text{ mm.} = \sqrt{10} \cdot 10^6 \text{ mm.} =$$
$$= 3{,}162278 \text{ mm} = \sim 3 \text{ km.}$$

Esto quiere decir que por un segmento $AB = \sim 3$ kilómetros esta recta se separa un milésimo de milímetro del círculo tangente : es una desviación de

$$0{,}001 \text{ mm.} : 3 \cdot 10^6 \text{ mm.} = \frac{1}{3} 10^{-9}$$

aproximación no alcanzable con nuestros instrumentos de hoy día.

Pero la distancia Sol-Neptuno es muy pequeña en el universo y si tomamos como valor del radio, el de un año de luz, longitud que también es pequeña tratándose de astronomía, tendremos

$$r = 365 \times 24 \times 3600 \times 300.000 \text{ km.} = \sim 10^{13} \text{ km.} = 10^{19} \text{ mm.}$$

y con $\delta = 10^{-3}$ milímetros

$$AB = \sqrt{2 \cdot 10^{19} \cdot 10^{-3}} \text{ mm.} = \sqrt{2}\, 10^8 \text{ mm.} =$$
$$= 141.421.356 \text{ mm.} = \sim 141 \text{ km.}$$

Ahora la desviación es

$$0{,}001 \text{ mm.} : 141 \cdot 10^6 \text{ mm.} = \sim 7 \times 10^{-11}$$

completamente imposible de medir.

Hagamos estos mismos cálculos en los sistemas hiperbólicos y elípticos de círculos, estudiados en el capítulo IV.

Sea c el círculo director y ω un círculo ortogonal de c y de radio ρ. En el triángulo SAS_1 tenemos (ver fig. 54)

$$\overline{SA}^2 = R^2 = (\rho + t)^2 - \rho^2 = t(2\rho + t)$$

$\therefore$

$$2\rho = \frac{R^2}{t} - t = \frac{R^2 - t^2}{t}.$$

Si en vez de considerar un sistema hiperbólico hubiéramos tomado

uno elíptico (fig. 55) o sea un círculo director c y los círculos que lo cortan diametralmente, hubiéramos tenido :

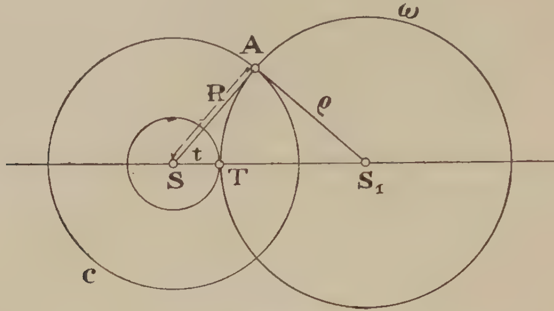


Fig. 54

$$R^2 = t(2\rho - t)$$

∴

$$2\rho = \frac{R^2}{t} + t = \frac{R^2 + t^2}{t}.$$

Poniendo $\varepsilon = \pm 1$ tendríamos

$$2\rho = \frac{R^2 - \varepsilon t^2}{t}$$

valiendo el signo superior para la geometría hiperbólica y el inferior para la elíptica. Haciendo $R = nt$ resulta

$$\rho = \frac{n^2 - \varepsilon}{2} t.$$

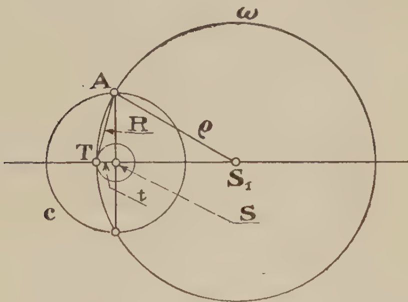


Fig. 55

Busquemos el valor de δ, diferencia entre una recta euclideana, tangente en T al círculo (S, t), y el círculo ω, representación de una recta no euclideana en el sistema considerado que pasa por el mismo punto T. Para ello substituiremos el valor de ρ en el lugar de r en la fórmula y en

$$AB = \sqrt{2\delta r}$$

∴

$$AB = \sqrt{(n^2 - \varepsilon)\delta t}.$$

Con

$$\delta = 10^{-3} \text{ mm.} \qquad \text{y} \qquad t = 15 \,.\, 10^{7} \text{ km.} = 15 \,.\, 10^{13} \text{ mm.}$$

resulta

$$AB = \sqrt{n^2 - \varepsilon}\sqrt{15} \,.\, 10^{5} \text{ mm.} = \sim \frac{4n}{10} \text{ km.}$$

Para $n = 40$, caso de Neptuno

$$AB = \frac{4 \,.\, 40}{10} \text{ km.} = 16 \text{ km.}$$

Si consideramos una esfera de radio R = 4 años de luz (algo menos que la distancia a α del Centauro, la estrella más vecina de la Tierra) estando la Tierra a 8 minutos de luz del sol, tendríamos

$$R = \frac{4 \times 365 \times 24 \times 60}{3} = 3285 \times 60 = \sim 2{,}5 \times 10^{5}$$

y entonces

$$AB = 4 \,.\, 10^{5} \,.\, n = 4 \,.\, 10^{5} \,.\, 2{,}5 \,.\, 10^{5} \text{ mm.} = 10^{11} \text{ mm.} = 10^{5} \text{ km.}$$

La desviación 0,001 milímetros en 100.000 kilómetros es absolutamente imposible de medir, cualquiera que sea la hipótesis que se haga sobre la constitución física de los instrumentos y métodos de medición empleados.

Por consiguiente tampoco nos es posible, con un círculo director algo grande, distinguir físicamente entre una recta euclideana y la representación, en el sistema de círculos elegido, de una recta no euclideana. En cuanto a la realidad misma es evidente que no podemos comparar en nuestro espacio una recta con otra recta que fuera recta en un espacio no euclideano, pues ni podemos salir de nuestro espacio, ni podemos comprobar si se puede o no se puede trazar paralelas a una recta.

En resumen, cualquier ensayo de comprobación empírica de una de las tres geometrías conduciría a operaciones imposibles, pues la precisión de las mediciones tendría que ser de orden atómico, en cuyo caso, físicamente, medir una longitud pierde todo sentido.

CAPÍTULO X

Conclusiones

Como un útil complemento a las páginas anteriores en que hemos esbozado rápidamente la manera cómo se puede, de acuerdo con las ideas de Hilbert, construir la Geometría como ciencia lógica, vamos ahora a hacer una ligera crítica de las consideraciones que esta manera de formar la geometría ha merecido de H. Poincaré, uno de los más excelsos matemáticos que ha producido Francia.

Al decir que Poincaré no ha comprendido restar la cuestión, y que sus apreciaciones son equivocadas, no pretendemos, ni restamos méritos al nombre de este sabio, ilustre por tantos conceptos, sino probar simplemente cuán difícil resulta para un cerebro ya orientado matemáticamente, aceptar otra dirección para el curso general de sus pensamientos.

En su obra *Science et Méthode* (1), página 127, dice Poincaré :

« Puesto que la palabra comprender, tiene muchos sentidos, las definiciones que mejor comprendidas sean por unos, no serán las que convengan a los otros : tenemos aquellas que tratan de hacer nacer una imagen y aquellas donde se limita a combinar formas vacías, completamente inteligibles, pero a las que la abstracción ha privado de toda materia.

« No sé si será necesario citar ejemplos : pero por de pronto la definición de las fracciones nos va a suministrar un ejemplo extremo. En las escúelas primarias, para definir una fracción, se corta con la imaginación y no en realidad, pues no supongo que el presupuesto de la enseñanza primaria permita semejante prodigalidad. En la Escuela normal superior, o en las Facultades, se dirá : Una fracción es el conjunto de dos números enteros separados por una línea horizontal : se definirán por convenciones las operaciones que pueden sufrir estos símbolos; se demostrará que las reglas de estas operacione son las mismas que en el cálculo de números enteros y se constatará, finalmente, que haciendo según estas reglas, la multiplicación de la fracción por el denominador, se encuentra el numerador. Todo esto está

(1) Ernest Flammarion, éditeur, París, 1909.

muy bien, porque la enseñanza se dirige hacia jóvenes que están ya desde hace mucho tiempo familiarizados con la noción de las fracciones a fuerza de dividir frutas u otros objetos, y cuyo espíritu afinado por una fuerte educación matemática, ha llegado poco a poco a desear una definición puramente lógica. ¿Pero cuales no serían las dificultades para un principiante con el que quisiéramos hacer servir esto?

« Tales son las definiciones que se encuentran en un libro justamente admirado y muchas veces coronado, los *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert. Veamos, en efecto, cómo principia : *Concibamos tres sistemas de cosas, que llamaremos puntos, rectas y planos.* ¿Qué son estas cosas? Ni sabemos, ni tenemos para qué saberlo : hasta sería fastidioso de saberlo; todo lo que tenemos derecho de saber, es lo que de ellos nos enseñan los axiomas ... »

No es cierto : la ironía de que quiere hacerse gala en este párrafo, está habilmente preparada, con el ejemplo anterior de las fracciones; pero, aparte de que el libro de Hilbert *no es un libro de texto* hecho para suplir — en su forma actual por lo menos — la enseñanza de lo que ahora llamamos Geometría, y que al tomarlo como tal, ya se comete un error, no es cierto que los axiomas nos enseñan nada de las *cosas,* pues nada puede enseñar un axioma sobre la naturaleza de las cosas, sino sobre las vinculaciones o relaciones de las cosas entre sí : se confunde aquí el «objeto», con la «relación de objeto a objeto», relación traducida eu un axioma, independiente, evidentemente, de la naturaleza de los objetos. Obsérvese que los diferentes grupos de conocimientos científicos que hemos llamado «ciencias», no estudian las «cosas en sí», sino las «relaciones entre las cosas». Un cierto grupo de estas relaciones forma lo que llamamos Geometría : ¿es posible negar a nadie el derecho de traducir estas relaciones en axiomas, característicos precisamente de la Geometría? ¿y hay alguna necesidad para ello de fijar de antemano la naturaleza de las cosas a las que vamos a aplicar después estos axiomas?

Como Poincaré no toma la cuestión desde su punto de vista real, sino de uno propio, nacido de una confusión entre las ideas de «definición» y de «vinculación por medio de axiomas», no puede naturalmente seguir el hilo de un raciocinio extraño al suyo, y así sigue :

« ... todo lo que podemos saber de ellos, es lo que nos enseñan los axiomas, por ejemplo, este : *Dos puntos diferentes determinan siempre una recta,* que es seguido de este comentario : *en lugar de determinan podremos decir que la recta pasa por estos dos puntos, o que une estos dos puntos o que los dos puntos están situados sobre la recta.* Así,

«estar situado sobre una recta» queda simplemente definido como sinónimo de «hacer parte de una recta.»

« Ved aquí, dice Poincaré, un libro del cual yo pienso mucho bueno, pero que no recomendaría a un estudiante de nuestros liceos : por otra parte, podría hacerlo sin temor, pues ellos no llevarían muy lejos su lectura. »

Esto depende del estudiante, indiscutiblemente; Poincaré no ha comprendido la utilidad pedagógica que puede tener la construcción lógica de la Geometría, preocupado en discutir la lógica de esta lógica (1).

Veamos otro párrafo de Poincaré (pág. 131).

«¡Pero se creerá que los matemáticos hayan alcanzado rigor absoluto sin hacer sacrificios! Nada de eso : lo que han ganado en rigor, lo han perdido en objetividad; apartándose de la realidad es cómo ellos han adquirido esta pureza perfecta : se puede ahora recorrer libremente sus dominios, antes erizados de obstáculos, pero estos obstáculos no han desaparecido, han sido solamente transportados a la frontera, y será necesario vencerlos de nuevo si se quiere franquear esta frontera y penetrar en el reino de la práctica.

«Se posee una noción vaga, formada de elementos disparatados, los unos *a priori,* los otros que provienen de experiencias más o menos asimiladas; se cree conocer por la intuición las principales propiedades : hoy día se han eliminado los elementos empíricos no conservando más que los *a priori;* una de las propiedades sirve de definición y las otras se deducen por razonamientos rigurosos. Esto está muy bien, pero quedaría por probar que esta propiedad. utilizada como definición, pertenece efectivamente a los objetos reales ... »

¿Para qué? Si una vez que la aceptamos, deducimos todo lo demás por *razonamientos lógicos,* no necesitamos nada más para formar un conjunto de conocimientos relacionados en forma lógica. o sea lo que llamamos una ciencia *lógica :* ahora, que la propiedad pertenezca a tal o cual clase de objetos, reales o no, es absolulamente indiferente de esta ciencia, pues lo que la caracteriza, lo que ha servido para formarla, es precisa y exclusivamente, los razonamientos lógicos posteriores a la definición. ¿Quién no ha aplicado razonamientos mecáni-

(1) Sin embargo el profesor G. B. Halsted ha escrito una geometría elemental notable, basada exclusivamente en los axiomas de Hilbert, cuyo uso, sino para alumnos, por lo menos para profesores de enseñanza secundaria, es muy recomendable.

cos a ciertos fenómenos sociales, o leyes geométricas a conceptos que no tenían nada de geométricos? ¿Cuánto no debe la moderna economía política a conceptos físicos (como la longitud, velocidad, vínculo, etc.), que no tienen nada que ver con el tiempo, la riqueza, la sociedad, etc.? Esta correlación entre las diferentes ciencias, estas dualidades de conceptos, esta independencia de las cosas en sí, con los vínculos que las unen, es lo que no ve Poincaré, que continúa así :

«... como definición pertenece efectivamente a los objetos reales que la experiencia nos ha hecho conocer y de donde hemos sacado nuestras vagas nociones intuitivas. Para probarlo será necesario recurrir a la experiencia, o hacer un esfuerzo de intuición, y si no podemos probarlo, nuestros teoremas serán perfectamente inútiles.»

Justamente lo contrario : lo que da su mayor generalidad a un teorema, es la posibilidad de aplicarlo a objetos que corresponden a definicipnes muy distintas : ¿puede negarse la ventaja de aplicar ciertas leyes de acústica (ondas, nodos, vientres, reflexión, refracción, etc.), a fenómenos ópticos, magnéticos y eléctricos? Cuando se deducen tales leyes de los fenómenos ondulatorios, nos importa poco saber si se va a tratar de luz, de calor, de sonido o de electricidad. El *ente* ligado por los axiomas, vínculos y razonamientos lógicos, no nos importa cuál es.

Sigamos a Poincaré en sus críticas a esta forma de utilizar la lógica :

« La lógica, a veces, engendra monstruos. Desde hace medio siglo se han visto surgir una multitud de funciones bizarras, que parecen esforzarse en parecerse lo menos posible a las honestas funciones que sirven para algo. No más continuidad, o si hay continuidad, falta de derivadas, etc. Del punto de vista lógico, son estas funciones extrañas las que son más generales ; y las que se encuentran sin haberlas buscado, no aparecen más que como un caso particular : no les queda más que un pequeño rincón.

« Otras veces, cuando se inventaba una nueva función, se tenía en vista algún objeto práctico : hoy, se las inventa expresamente para poner en evidencia las faltas de los razonamientos de nuestros antecesores, y *no se sacará de ellas jamás otra cosa que esto.* »

El mismo Poincaré se ha encargado con su obra matemática, de dar el mayor argumento en contra de estas manifestaciones que, tal vez, ni él mismo se hubiera atrevido a firmar en un escrito aislado : pero entre las páginas de un libro pasan más desapercibidas y sirven para preparar, después de los párrafos anteriores, la conclusión siguiente :

« Si la lógica fuese la única guía del pedagogo, sería por las funciones más generales, por las más bizarras, por las que sería necesario comenzar : al principiante, habría que ponerlo de inmediato en contacto con este museo teratológico : si no se hiciera así, podrían decir los lógicos que no se alcanzaba el rigor más que por etapas. »

Perfectamente ; y este alcance del rigor, por etapas sucesivas, es un ideal pedagógico : la enseñanza de la ciencia se iría haciendo más rigurosa en cursos sucesivos, paralelamente al desenvolvimiento intelectual del alumno, que marcha hacia su perfeccionamiento por etapas sucesivas, evidentemente.

Pero la cuestión lógica, es otra, y el confundir una con otra, para hacer la crítica de la cuestión lógica con argumentos sacados de aplicar exageradamente el concepto lógico al pedagógico, conduce a resultados absurdos.

En la página siguiente a la que hemos analizado, tiene Poincaré una contradicción evidente :

« Sin duda es duro y molesto, para un maestro, enseñar lo que no lo satisface enteramente ; pero la satisfacción del maestro no es el único objeto de la enseñanza : debe primeramente preocuparse de lo que es el espíritu del alumno y de lo que se quiere que llegue a ser. »

Y es por eso, precisamente, por lo que no resulta duro ni molesto para un *maestro* — en la acepción que debe tener la palabra — enseñar algo que no le satisfaga enteramente, si con ello ha de lograr, más adelante, y con algo que entonces si le satisfaga plenamente, que el espíritu del alumno sea lo que se ha querido que fuese.

Los raciocinios de Poincaré, vuelven de nuevo a estar mal dirigidos en los párrafos siguientes :

« El objeto principal de la enseñanza matemática es el de desenvolver ciertas facultades del espíritu, y entre ellas la intuición no es de las menos preciosas. Es por ésta por lo que el mundo matemático queda en contacto con el mundo real, y cuando las matemáticas puras pueden pasarse sin ella, será necesario entonces tener otros recursos para llenar el abismo que separa el símbolo, de la realidad : el práctico tendrá siempre necesidad de esto, y para cada geómetra puro, debe haber cien prácticos.

« El ingeniero debe recibir una educación matemática completa, pero ¿ para qué le debe servir ? Para ver los diferentes aspectos de las cosas y para verlas a prisa : no tiene tiempo para otra cosa. Es necesario que en los objetos físicos complejos que se le ofrecen, reconozca prontamente el punto donde pueden asirse los útiles matemá-

ticos que se le han dado. ¿Cómo lo hará, si dejamos entre unos y otros ese abismo profundo, formado por los lógicos»?

Pero es que tal abismo no existe : por el contrario, los lógicos han substituído a la única relación entre un *símbolo* y un *objeto real,* la posibilidad de infinitas relaciones entre *un mismo y único símbolo* e *infinitos objetos reales.* La utilidad de las matemáticas se ha multiplicado así : en vez de un puente entre el mundo matemático y el real, se han construído infinitos puentes. De este modo la teoría de los axiomas es un gran economizador de pensamiento y llena pues el objeto de una ciencia formal.

La consideración de si esta ciencia «lógica», puramente «formal» y «exacta» en este sentido, se aplica a nuestro universo, es una cuestión física, es decir «no exacta matemáticamente» sino sólo aproximada dentro de los límites de precisión de un problema físico dado, y que nuestras geometrías son excelentes bajo este concepto, nos lo ha enseñado largos siglos de experiencia terrestre y astronómica.

Desde que dí estas conferencias se han generalizado los conceptos anteriores. Hilbert mismo probó una «teoría axiomática de la radiación» *(Deutsche Physikalische Zeitschrift,* 1914), con excelentes resultados, y varios sabios han reducido a pocos axiomas, teorías como la del calor, la de los quanta, etc.

En la filosofía natural es hoy general la creencia de la gran conveniencia que hay en reducir el campo de los estudios físicos, naturales y psíquicos a pocos axiomas que puedan comprobarse bien experimentalmente, limitando así, con mucha economía, el terreno de la discusión, para luego hacer actuar el mecanismo de la lógica sobre premisas admitidas por todos.

Más tarde, si algún fenómeno contradice los resultados del cálculo, se sabrá dónde buscar la falla : en los pocos axiomas postulados. En cuanto a la esencia de los substantivos sujetos de nuestras oraciones al noumeno, está fuera del campo de la ciencia exacta; la teoría de los axiomas nos enseña la modestia del saber y de las cosas en sí, repetiremos con Paul Dubois Reymond : *Ignorabimus.*

NECROLOGÍA

La ley fatal que agosta y renueva la vida en la tierra nos ha arrebatado en pocos días cuatro estimados consocios, cuyas actividades en pro de la Sociedad Científica Argentina ésta nunca podrá olvidar. La terrible parca nos ha privado de cuatro meritísimos compañeros de tarea, los señores ingenieros Juan Pelleschi y Alberto D. Otamendi, el doctor Juan J. J. Kyle y el doctor Adolfo Mujica. La Sociedad Científica Argentina ha cumplido con ellos acompañándolos en los sepelios.

Vamos a recordarles en el orden cronológico de su deceso.

En el próximo número daremos las notas biográficas de los doctores Juan J. J. Kyle, Adolfo Mujica e ingeniero Alberto D. Otamendi.

INGENIERO JUAN PELLESCHI

† El 6 de febrero de 1922

Damos a continuación la oración fúnebre que el presidente de nuestra asociación, ingeniero Santiago E. Barabino, pronunció ante el féretro del ingeniero Pelleschi, porque ella sintetiza la acción proficua y valiosa de nuestro extinto consocio y el sentimiento que su desaparición causara en nuestro mundo intelectual. Dijo el señor Barabino :

Señores :

Vengo en nombre de la Sociedad científica argentina, del Instituto geográfico argentino, del Congreso sudamericano de ferrocarriles, a pedido de su presidente, ingeniero Santiago Brian, y en el mío propio, a dar, ante este féretro que guarda los despojos mortales del ingeniero Juan Pelleschi, el último adiós al ilustrado consocio y al querido amigo que en este doloroso momento — cumplida la luminosa trayectoria de su vida — transpone el umbral que franquea el mundo del eterno silencio.

El ingeniero Pelleschi, nacido en Italia y laureado en la Universidad de Bolonia, vino a nuestro país en 1873, entrando a formar parte del Departamento de ingenieros de la Nación que presidía el ilustrado profesional don Pompeyo Moneta, y en el que actuaban también sus compatriotas los ingenieros Cristóbal Giagnoni y Emilio Rosetti.

Conocí al señor Pelleschi en 1882, por haberme nombrado el Departamento de ingenieros civiles de la Nación — que dirigía ya el señor ingeniero Guillermo White — ayudante de dicho competente profesional, quien ocupaba entonces el cargo de ingeniero jefe de la sección Tucumán, y al cual se le había encomendado el estudio de una sección de la prolongación del Ferrocarril Central Norte.

En esa época, nuestro hoy lamentado amigo había ya realizado importantes estudios de vialidad, ferroviaria y estradal, y exploraciones de manifiesta importancia en diversas regiones de la República. Una de ellas, la del río Bermejo, debido a la pérdida de la embarcación empleada, le obligó a recorrer a pie una extensa zona del territorio del Chaco. Esta expedición, a pesar de ser muy peligrosa, le dió margen para hacer estudios y anotaciones geográficas y lingüísticas, que condensó luego en su notable trabajo *Otto mesi nel Gran Chaco,* en el que se destacan con pronunciado relieve tanto el ilustrado ingeniero como el filólogo juicioso. Esta obra, escrita en italiano, mereció el honor de ser traducida a otros idiomas. Lo fué al castellano por el docto argentino señor Samuel Lafone Quevedo, director del Museo Nacional de La Plata.

Como complemento de esta obra, escribió también el señor Pelleschi otro trabajo intitulado *Los indios matacos y su lengua*, ensayo de gramática y vocabulario, de real importancia lingüística, compilado de acuerdo con sus pacientes investigaciones personales, y el cual fué publicado en el *Boletín del Instituto geográfico argentino* precedido por una elogiosa introducción del mismo doctor Lafone Quevedo.

Este trabajo le granjeó la estimación y amistad del general Bartolomé Mitre, de quien, desde entonces, Pelleschi fué colaborador en el diario *La Nación;* y le mereció también ser incorporado a la Junta de historia y numismática.

En su introducción, el señor Lafone Quevedo hace resaltar la importancia de ambos trabajos en esta forma :

« Antes que el señor Juan Pelleschi publicase su interesante y concienzudo libro *Otto mesi nel Gran Chaco,* la lengua de los matacos

era tan desconocida para todos, como eran conocidas y numerosas las tribus que la hablaban... » Y agrega : « ... entró el ingeniero Juan Pelleschi al Chaco de la manera tan pintoresca que describe, coronando su obra con la parte lingüística, en que *descubría de nuevo* (permítaseme la expresión) el idioma de los *Vicquii*, a quienes nosotros damos el apodo de *matacos* y *mataguayos...* »

De sus estudios ferroviarios sólo recordaré los de mayor importancia : la línea del ferrocarril de Cobos a Salta, pasando por Lagunilla y descendiendo al valle de Lerma por la quebrada de Chachapoya, estudio que demostró la alta competencia técnica de su autor; el ramal de Frías a Santiago del Estero y la sección Los Sauces (Rosario de la Frontera) a río de las Conchas (Salta).

En este último, como dije, intervine como miembro de la comisión que presidía el ingeniero Pelleschi. En él aprendí a conocer no sólo la competencia del jefe que la suerte me deparara, sino que también el correcto caballero, pues Pelleschi era lo uno y lo otro, en el sentido más amplio de la palabra. No quiero silenciar un rasgo de honradez profesional. Tanto este estudio cuanto el siguiente, que realizamos en el Saladillo (Tucumán), llevan la firma de sus auxiliares ingenieros Emilio Candiani, Braive y yo, y el « visto bueno » del caballeroso jefe que no quiso que nuestra intervención profesional fuera desconocida.

Y aquí tengo que hacer mención de un lamentable caso de ingratitud oficial. El estudio en el Saladillo tenía por objeto resolver si se podía salvar el cañadón del arroyo homónimo sin el túnel y viaducto, comenzados ya a efectuar, de acuerdo con un proyecto aprobado.

Se nos encomendó en la creencia de que dichas obras eran inevitables, como lo aseguraba el técnico que las proyectara. Desgraciadamente, a los quince días de estudios en el terreno, el señor Pelleschi comunicaba al Departamento de obras públicas que tan costosas obras de arte pudieron evitarse. Como la cuestión suscitada servía de arma política — (habíase iniciado la cuestión presidencial !) — la Cámara de diputados nombró una comisión investigadora; pero el bando contrario trató de desvirtuar nuestro estudio diciendo que el señor Pelleschi era un literato, un poeta... Herido por la maligna insinuación, Pelleschi, el hombre de proverbial moderación, cedió el puesto al profesional ofendido y contestó al suelto hiriente, estampado en un periódico local, con una carta en la que decía que no estaba acostumbrado a hacer cuestiones bizantinas, y que se comprometía no sólo a demostrar la verdad del estudio

realizado, sino que también — si se le concedía un corto plazo prudencial — a mejorarlo más ventajosamente aún.

Pelleschi fué « suspendido » en sus funciones !...

Este hecho puso en evidencia otra faz moral de nuestro amigo : ni una queja profirieron sus labios. Sin recursos, pues no poseía más que su modesto sueldo de profesional, se aprestó con fortaleza de ánimo a la lucha por la vida.

Conocedor de nuestro país por haberle recorrido en las numerosas comisiones oficiales que se le habían confiado, proyectó, solicitó y obtuvo del Congreso la concesión de un ferrocarril de Villa María a Rufino y Bahía Blanca que, tras de beneficiar una importante región del país, le permitió, después de largos años de labor, formarse una posición desahogada, bien merecida.

Dejo a sus connacionales la noble tarea de hacer resaltar las virtudes del señor Pelleschi como ciudadano italiano y como miembro de su colectividad en nuestro país, muy honrosas por cierto.

Por mi parte, terminaré diciendo que sus méritos en la Argentina le llevaron a ocupar el alto cargo de *comisario general* de la gran exposición internacional de ferrocarriles (celebrada en el Centenario de mayo de 1910) y el de delegado de la comisión organizadora.

Su eficiente y eficaz actuación la ha resumido en forma lapidaria el señor ingeniero Alberto Schneidewind en su discurso de clausura del importante certamen, manifestando que Pelleschi : « ... con su laboriosidad prodigiosa, sus fecundas iniciativas y ecuanimidad ha llenado completamente la delicada tarea de su cargo honorario, siendo el alma de la comisión ejecutiva y el nervio de la exposición, haciéndose acreedor a las mayores felicitaciones... »

Señores : El ingeniero Pelleschi ha fallecido a los 76 años de edad, pero, más que ésta, le ha vencido la vida de soldado, que a los 70 años se ha permitido hacer en las nevadas crestas de los Alpes, sin meditar que lo que hizo en su primera juventud, en 1866, no era lógico medio siglo después. Ha vuelto de su patria, a donde fuera a defenderla contra su secular enemigo, con la satisfacción moral del triunfo de la justicia; pero doblegado físicamente.

Esta fúnebre ceremonia constituye el epílogo de su noble acción.

Ingeniero Pelleschi : Descansa en paz, y ten por seguro que ni tus amigos, ni el país en que tan útilmente actuaste podrán olvidarte. Tengo la certeza de que, por un acto de justicia póstuma, será dado tu nombre a una estación de ferrocarril en premio a tus meritorios servicios ferroviarios.

BIBLIOGRAFÍA

Espace, temps et gravitation, par A. S. EDDINGTON. Edición en francés, con un prólogo de P. Langevin. J. Hermann, editores, un volumen de 262 + 150 páginas, París, 1921.

La ya famosa teoría de la relatividad ha dado tema a muchos artículos, pudiendo decirse que no hay revista científica o casa editora que no haya dado a luz alguna publicación sobre ese punto. Y no es para menos, dados los alcances que se le asignaban cuando recién comenzó a conocérsela y que parecían ser de un efecto destructor absoluto sobre toda la mecánica conocida hasta el día.

Entre las muchas obras o monografías editadas hasta el presente es, la que ahora nos ocupa, una de las más completas, y tiene además el valor de ser escrita por uno de los autores más habilitados para hacerlo : Eddington, el profesor de astronomía de la Universidad de Cambridge y jefe de una de las comisiones inglesas encargadas de obtener en el eclipse de 1919 alguna comprobación sobre la desviación de la luz.

La cuestión no era nueva. Ya Newton, en su *Óptica*, se preguntaba si la luz sufría la atracción de los cuerpos y si ésta era inversamente proporcional a la distancia; por eso cuando las teorías de Einstein volvieron a plantear el caso, nada mejor que intentar una comprobación experimental, y una excelente ocasión se presentaba con el eclipse de sol del 29 de mayo de 1919, que convenía aprovechar, pues tardaría unos veinte años en presentarse otra tan buena.

Inglaterra formó dos expediciones que puso a cargo de Eddington y del doctor Crommelin, nombres hoy célebres por eso, debiendo operar la primera en la isla del Príncipe (golfo de Guinea) y la segunda en Sobral (Ceará, Brasil). De las fotografías tomadas por una y otra se obtuvo, como valor de la desviación, 1″61 y 1″98 respectivamente. ¡ Y la teoría de Einstein había predicho 1″74, casi el valor medio de los dos obtenidos !

El libro de Eddington, del que ya conocíamos la edición inglesa de la University Press, de Cambridge, es una obra recomendable por su claridad y método; pero la edición francesa lo es más todavía, pues contiene un largo apéndice con la exposición de la teoría matemática.

Para terminar diremos que, aparte de algunas obras en alemán (especialmente la de Weyl), es la de Eddington la de exposición más prolija y detallada. Y el ema es bien digno de estudiarse, no porque eche por tierra, como inexactos, los

conocimientos que se tenían hasta el presente, porque inexactos ya sabían que lo eran, Newton y Laplace, sino precisamente para conocer la razón de esas divergencias, poder apreciarlas con más aproximación cuando convenga y dominar el nuevo instrumento, más afinado, de más alcance, de más potencia, como más moderno, que se llama Principio de relatividad.

P. A. ROSSELL SOLER.

Inversión y polaridad en un triángulo y tetraedro, por ROBERTO ARAUJO. *(Publicaciones del Laboratorio y Seminario matemático,* t. IV, memoria 1ª.)

Sobre uno de los capítulos más interesantes de la geometría descriptiva, el referente a la polaridad e inversión respecto de un triángulo y tetraedro, el señor Roberto Araujo ha presentado un interesante trabajo, derivándose de su estudio numerosas e importantes propiedades métricas que han dado origen a las geometrías del triángulo y del tetraedro.

En dicho trabajo el autor se limita a considerar las relaciones que ligan la inversión y la polaridad respecto de un mismo triángulo y tetraedro, que vienen a condensarse en esta proposición : la figura inversa y la polar de una figura respecto de un triángulo o tetraedro constituyen un sistema polar.

Asimismo expresa en él, por primer vez y mediante consideraciones puramente geométricas, las teorías de las cónicas y cuádricas analagmáticas en estas dos transformaciones, para lo cual ha establecido las propiedades más importantes de éstas, siendo la mayoría de las demostraciones completamente originales como también la idea de relacionar las inversiones respecto de un triángulo y tetraedro con los haces de cónicas y redes de cuádricas respectivamente.

M. U.

Estudio sobre la edad de la Tierra a base de los procesos termológicos, por el ingeniero OTTOMAR SCHMIEDEL, en *Anales del Museo nacional de historia natural de Buenos Aires,* tomo XXXI.

El ingeniero Ottomar Schmiedel ha dado a la publicidad un interesante estudio sobre la edad de la Tierra a base de los procesos termológicos; problema cuya solución se encuentra dificultada en alto grado por la deficiencia de los datos relativos a las características físicas de la materia en altas temperaturas.

El autor, después de reseñar las tentativas de Huyghens, Croll, Joly y Thompson, fundadas en hipótesis distintas, hace observar ciertas singularidades en la formación de la corteza terrestre, singularidades que proporcionan datos de estimable valor y cuyo estudio conduce a cierta hipótesis referente a la formación de los mares.

El ingeniero Schmiedel concreta su estudio en diversos capítulos, todos ellos muy interesantes y desarrollados en una forma clara y concisa que revelan un profundo conocimiento del tema tratado.

Las conclusiones de los resultados obtenidos, a base de las teorías físico-matemáticas del calor, expónelas el autor en la forma siguiente :

1ª Tiempo transcurrido desde la época en que la pérdida del calor empezó a superar la producida por contracción (más o menos) : 1500 millones de años ;

2ª Tiempo desde que se inició la formación de la corteza terrestre : 700 a 800 millones de años ;

3ª Tiempo transcurrido desde que se inició la profundización de los mares : 300 a 350 millones de años ;

4ª Temperatura máxima en el interior del globo : 4500 a 5000° C. ;

5ª La zona de fusión se encuentra ahora en la profundidad de $\frac{R}{150}$ desde la superficie.

Agrega que, en los primeros 100 millones de años, después de comenzada la solidificación, la zona de fusión avanzó hacia el interior de 10 a 13 kilómetros. En los últimos 100 millones de años, que precedieron al estado actual, el avance no ha sido sino de 2,5 a 3,5 kilómetros, o sea la cuarta parte de aquel valor al principio de la solidificación.

Admite, por otra parte, que en los próximos 4500 millones de años la zona de fusión avanzará de 60 a 80 kilómetros, de modo que se triplicará aproximadamente el espesor de la costra ;

6ª La contracción de la Tierra sucede en la época actual muy lentamente. En el estado que hemos calificado como inicial, es decir, hacen más o menos 1500 millones de años, el diámetro de la Tierra debe haber sido aproximadamente 460 kilómetros mayor que el diámetro actual ;

7ª El enfriamiento del globo sucede tan lento que sólo después de 400.000 millones de años habrá bajado, de acuerdo con el cálculo, la temperatura en el centro en el 60 por ciento.

Acompaña a este laborioso trabajo del ingeniero Schmiedel una serie de cuadros de valores que permiten obtener resultados directos para distintas épocas.

M. U.

EL CONGRESO SISMOLÓGICO DE MANCHESTER

POR EL DOCTOR GALDINO NEGRI

En el Congreso internacional de sismología que tuvo lugar en Manchester — desde el 18 hasta el 22 de julio de 1911, — geofísicos de fama mundial, especialmente el alemán doctor Wiechert, hicieron observar que los tiempos de los registros sísmicos, relativos al comienzo de los primeros tremores preliminares de terremotos lejanos, están retardados con respecto a los tiempos que se obtienen de la hodógrafa Zeissig (internacional) extrapolada.

Es bien sabido que el doctor Zeissig, director de la estación sismológica de Ohenhein (Alemania), valiéndose de un selecto material de observaciones de Zöpritz y Geiger, interpoló gráficamente desde el epicentro hasta la distancia epicentral de 13.000 kilómetros, y obtuvo una tabla (conocida con el nombre de « tabla Zeissig ») con la cual de inmediato se obtiene la duración de los primeros tremores preliminares (Y_1), de 10 en 10 kilómetros, desde el epicentro hasta la distancia epicentral de 13.000 kilómetros, límite de las distancias epicentrales de las observaciones disponibles con las cuales fué construída dicha tabla. Multiplicando la duración de los primeros tremores preliminares por 1,25 se obtienen los valores de los tiempos empleados por esos primeros tremores preliminares para recorrer la distancia epicentral; así como también aparece una tabla de Zeissig análoga a la precedente en la cual de 10 en 10 kilómetros, se encuentran dichos tiempos t, desde el epicentro hasta la distancia epicentral dicha. Ahora bien; los geofísicos Wiechert, Heker y Reid han hecho observar en el Congreso que los valores de los tiempos t_1 que se obtienen extrapolando la hodógrafa de Zeissig más allá de 13.000 kilómetros

hasta el antípoda, resultan algo menores que los verdaderos. Esto motivó la discusión y aprobación de esta moción: « *Débense modificar algo los valores de dichos tiempos tomando por base un nuevo y selecto material de observaciones.* » De esto me ocuparé más adelante.

Antes, a título de divulgación científica, creo útil exponer brevemente las más importantes cuestiones que se debatieron en el Congreso, tanto más que entre nosotros no se tiene una idea bien determinada acerca de los problemas que trata de resolver la sismología moderna, en la solución de los cuales se hallan empeñados prestigiosos geofísicos de todo el mundo. Sin duda, se acerca el día en que las naciones volverán a ocuparse paulatinamente del estudio de la geofísica, reorganizando nuevas asociaciones científicas. La sismología, que entre todos los ramos de la geofísica ocupa un puesto descollante, no será seguramente la última en ocupar la atención de todas las naciones, donde ya florecieron clásicos trabajos, cuyas observaciones e investigaciones fueron interrumpidas por la gran conflagración europea, primeramente, y después por las convulsiones sociales y sus consecuencias, que hasta hoy continúan haciéndose sentir en todo el mundo.

Me referiré en esta nota, brevemente, al último Congreso de sismología (1), es decir, a la reunión de la Comisión permanente de la Asociación internacional de sismología, que se realizó en Manchester desde el 18 hasta el 22 de julio de 1911, por la razón ya expuesta, y, además, por creerlo también en cierta manera de actualidad, dado que ciertamente dicho Congreso será necesariamente la cabeza del puente que debe empalmar los resultados de los estudios sismológicos realizados antes de la gran conflagración con los que ya se han obtenidos y se obtendrán después, separados entre sí por una laguna de cerca de diez años de casi inactividad científica, especialmente en esas naciones que preponderantemente concurrieron a enriquecer el caudal científico mundial.

En el Congreso estuvieron representadas las siguientes naciones:

Alemania, Austria-Hungría, Bélgica, Bulgaria, Canadá, España, Estados Unidos de Norte América, Francia, Inglaterra, Italia, Japón, Holanda, Rumania, Rusia, Serbia y Suiza, por los más conocidos geofísicos y sismólogos de todo el mundo.

El profesor Heker dijo que por el « Bureau central » de Estrasburgo ha confeccionado las tablas auxiliares para el cálculo de la distan-

(1) Noticias que extraigo de la relación que uno de los congresales, el doctor Oddone, publicó en el *Boletín de la Sociedad sismológica italiana.*

cia epicentral y un mapa azimutal equidistante con el centro en Estrasburgo. Después, da cuenta de las confrontaciones obtenidas con los aparatos sísmicos sobre la plataforma sísmica oscilante, y propone como programa futuro, además de la publicación de los catálogos de los macros y microsismos de los años 1907 y 1908, la construcción de la hodógrofa tomando por base el nuevo material recogido; y después de algunas consideraciones respecto a la instalación de nuevas estaciones, manifiesta que la Asociación sismológica internacional, tendrá también la cooperación de la Asociación geodésica internacional.

A continuación habla sobre la rigidez de la tierra. Con los resultados de las observaciones pendulares hechas en las minas de Pribram con el objeto de observar cómo las periodicidades atractivas lunares pueden tener influencia sobre los péndulos, hace notar que en aquellas notables profundidades el efecto de la radiación térmica solar resultó 7 veces menor que la obtenida con las primeras instalaciones. Obtuvo así, sin alteración ninguna, la figura que la plomada describe bajo la influencia de la luna y la figura resultó una elipse muy achatada.

De la relación entre las elongaciones observadas con las que le asigna la teoría, dedujo la rigidez de la costra terrestre, la cual en la dirección E-W se reveló rígida como el acero; y en la dirección N-S tres veces aproximadamente menos rígida (respectivamente $6 . 10^{11}$ y $1,8 . 10^{11}$. Módulos de Joung).

Esta asimetría elástica, que Heker encontró menos acentuada en Freiberg que en Potsdam, merece un serio y profundo estudio, y por eso propone que se repitan las observaciones en estaciones que se elegirán oportunamente.

El profesor Darwin, dice que la mayor rigidez de la tierra según la dirección E-W puede depender de la rotación terrestre; pero contesta el profesor Love que tal influencia sería muy pequeña; más bien tal vez podría buscarse dicha causa en la influencia gravitacional de la onda de marea oceánica capaz de presionar el fondo del mar suficientemente como para hacer aumentar aparentemente la rigidez de la costra. El profesor Orloff refiere análogas observaciones hechas por él en Jurjew y de las que piensa hacer en Tomsk, en el centro del imperio ruso; y en fin, el profesor Van der Stok recuerda un trabajo idéntico hecho en Java por el doctor Braak el cual encontró en aquellos sismogramas trazas evidentes de las mareas terrestres, y la misma asimetría, pero menos acentuada.

Todos estuvieron acordes en que para despejar la importante in-

cógnita sería necesaria la instalación de nuevas estaciones pendulares decidiéndose que dicho trabajo sea realizado en colaboración con la Asociación geodésica internacional, resolviendo que dichas estaciones estén ubicadas: una en París, cerca de la costa oriental del Atlántico; una en Johanisburg, en la extremidad sur del gran continente africano; otra en América continental y una cuarta en Tonisk (Asia central).

Sigue después el doctor Heker, hablando de las mareas terrestres y de sus asimetrías. Atribuye esas anomalías a diferentes causas, a las singularidades interiores de la costra y a la orogenia continental. Hace observar que la nieve disminuye la amplitud del período diurno, mientras que la presión y la lluvia no ejercen ninguna influencia sobre las mareas de largo período.

En un cuarto intermedio se discute la cuestión de la bibliografía sísmica.

El príncipe Boris de Galitzin presenta y discute su nuevo sismógrafo para la componente vertical.

Es bien sabido que la componente vertical de un choque sísmico, tiene escasa importancia para las estaciones telesísmicas, es decir, para estaciones ubicadas a gran distancia del epicentro, mientras que adquiere importancia capital en el epicentro, o en zona epicéntrica, porque esta componente nos puede ilustrar respecto a la profundidad del hipocentro, o mejor dicho, acerca de la profundidad media del « block » subterráneo causante del accidente geológico, es decir, del temblor o terremoto.

El aparato, de 50 centímetros de altura y de un metro aproximadamente de largo, está provisto de una masa de cerca de 50 kilogramos. El período propio es de 14^s aproximadamente. El movimiento propio es amortiguado por medio de una lámina de cobre intercalada entre los polos de un imán permanente. Una bobina fijada al péndulo se mueve entre las armaduras de otros imanes y en la corriente inducida acciona un galvanómetro de registro óptico.

El período, en el sismograma, resulta idéntico al período del suelo; y de la amplitud de movimiento del diagrama se puede deducir la amplitud del movimiento del suelo mismo. El máximo en el sismograma no se produce al mismo tiempo que la agitación máxima del suelo, habiendo un retardo que se puede calcular y el cual se debe tener en cuenta.

El aparato fué experimentalmente ensayado sobre una plataforma

que puede oscilar verticalmente, cuyos movimientos eran registrados directamente. La coincidencia entre el período y la amplitud observados y calculados fué muy buena. Tanto la plataforma como el aparato registraban sus movimientos sobre el mismo tambor girante; era fácil, por lo tanto, darse cuenta del valor del retardo de la fase a que me referí anteriormente; aquí también el valor del retardo experimental resultó sensiblemente igual al valor del retardo teórico calculado.

Los profesores Lamb y Schuster observan que sólo con cierta reserva se puede admitir la constancia de la relación entre las amplitudes de las ondas sísmicas, la cual puede variar con la naturaleza del suelo.

El profesor Köveslighethy habla sobre la histeresis sísmica, acerca de la posibilidad de una previsión geodinámica, basada sobre la variación con el tiempo del módulo de elasticidad de la costra terrestre. Toman parte en la discusión los profesores Reid y Oldham, delineándose así dos directivas acerca del modo de interpretar un terremoto. Una que considera el terremoto debido a una diminución repentina de una tensión acumulada, y otra que atribuye la causa del fenómeno a la producción instantánea de una alta tensión.

El doctor Oddone expone sus investigaciones efectuadas en Roma, sobre un nuevo método dinámico para la medida del módulo de elasticidad de Young de las rocas. El método es de percusión y se basa en la medida de la superficie de contacto o superficie de presión que se establece entre una pequeña esfera de acero que cae y la roca a experimentar.

Estas medidas fueron efectuadas con la exactitud de 1/200 de milímetros. El doctor Oddone ensayó con rocas en forma de magníficos paralelepípedos rectangulares, a fin de poder determinar la elasticidad según las tres direcciones ortogonales, una de las cuales era la de estratificación.

Encontró así que algunas categorías de rocas plutónicas, entre las más importantes de la litósfera, son hisótropas. Además en su investigación encontró para el módulo de Young valores más altos de los comunes, y tales, que traducidos en velocidades proporcionan, en fin, para las rocas plutónicas, valores que concuerdan con los que la sismología atribuye a los primeros tremores preliminares en la costra terrestre (cerca de 7,4 km de seg.)

El profesor Napier Dannison resume algunas observaciones acerca de los movimientos lentísimos de un péndulo horizontal al aproximar-marse a una depresión barométrica, y acerca de las explosiones del *grisou*.

Omori diserta acerca de observaciones con respecto a la formación de nuevos cráteres durante la erupcion del volcán Usu-San en Hokkaido, provincia de Ieso (Japón) y acerca de los fenómenos sísmicos que lo acompañaron.

Esos cráteres surgieron paralelamente al borde del lago hasta una altura de cerca de 250 metros, y el borde mismo se levantó, a su vez, formando una colina de una altura igual a la de los cráteres.

Omori dijo que llevó aparatos sismográficos portátiles hasta una distancia de 1 kilómetro de las bocas de los cráteres, y pudo observar que los caracteres de los tremores eran diferentes, según si los temblores venían o no acompañados con erupciones. También la frecuencia de los « aftershockes » (réplicas) no tenía la acostumbrada típica marcha de las réplicas que siguen a un gran terremoto.

El príncipe de Galitzin confirma cuanto ya había expuesto en el Congreso de Zarmat, acerca de la posibilidad de determinar la posición del epicentro de un movimiento sísmico por medio de los sismogramas de una sola estación, calculando la tangente del azimut referida al meridiano de la relación de las primeras desviaciones de las componentes N-S y E-W de los péndulos horizontales.

Propone después una escala dinámica experimental, apta a apreciar la intensidad de los fuertes macrosismos en las zonas epicentrales, que pueda ser substituída a las actuales escalas de intensidad empíricas.

Es sabido que los elementos más importantes que determinan el poder destructivo de un terremoto, a paridad de las otras condiciones son el período y la amplitud de onda. Así, *grosso modo*, siempre a paridad de condiciones, se puede decir que el poder destructivo es proporcional a la amplitud de onda e inversamente proporcional al período. Se explica entonces, que un movimiento sísmico, de breve período con ondas poco amplias pueda tener un poder destructivo igual a otro de más largo período con ondas más amplias. Esos elementos están ligados entre sí por la relación pendular

$$A = 2\pi^2 \frac{a}{T^2}$$

donde a representa la amplitud de onda, T el período y A la aceleración máxima

El príncipe de Galitzin determinó la aceleración máxima, fundándose sobre el rebatimiento de paralelepípedos rectos rectángulos puestos en pie, y los cuales tengan todos igual base pero diferentes alturas.

El rebatimiento de un paralelepípedo, y no del que lo sigue o del que lo precede, proporciona dos valores límites de la aceleración máxima.

La idea no es nueva, y fué aplicada un poco en muchos lugares; pero Galitzin introdujo en su método una modificación aparentemente insignificante pero que resulta en realidad de mucha importancia.

Consiste esta modificación en hacer apoyar los paralelepípedos sobre el suelo, solamente por medio de dos laminitas de bronce, paralelas, horizontales, contenidas en las dos caras más grandes entre las cuatro caras verticales del paralelepípedo. Queda así, no sólo mejor definido el eje de rotación, sino también cuando el paralelepípedo haya recibido un impulso y se ponga a oscilar, su amplitud y su período disminuirán rápidamente. Substancialmente se tendrán en el paralelepípedo las condiciones de un rápido amortiguamiento, subsistiendo la proposición de que la relación entre dos amplitudes sucesivas se mantiene constante:

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{\theta_3}{\theta_2} = \frac{\theta_4}{\theta_3} = \text{etc} = \text{constante.}$$

El paralelepípedo, así, se rebate solo, si la aceleración fué la necesaria para que la reacción de inercia vuelque el « block » y no para engrandecimientos debidos a resonancias. Las experiencias hechas con la plataforma oscilante demostraron que realmente la aceleración del movimiento forzado era la determinante del volcamiento del paralelepípedo.

Si se mudara la amplitud, para obtener el volcamiento del paralelepípedo, necesitará también variar el período; y variarlo tanto de manera que la aceleración quedara constante.

Luego el profesor Reid habla del gran interés que habría *en perfeccionar las curvas hodógrafas,* y, con ese fin, hace *una terminante moción al « Bureau Central » para que asuma el estudio. La moción da origen a una discusión, en la cual el príncipe de Galitzin recomienda valerse sólo de sismogramas relativos a sismos y a epicentros bien determinados.*

El profesor Wiechert aprovecha de esta discusión para dar una conferencia sobre la hodógrafa y acerca del camino que recorren los rayos sísmicos, exponiendo e ilustrando sus conocidas ideas sobre la constitución interior de la Tierra. Dice Wiechert que las ondas sísmicas atravesando la Tierra, la hacen en cierta manera transparente, y permiten el estudio riguroso. Uno de los más brillantes resultados de la sismología moderna consiste en poder obtener con las observaciones de las ondas sísmicas, el conocimiento del estado elástico de la tierra, capa por capa.

Respecto a la velocidad en el interior de nuestro globo, de los primeros tremores preliminares, dice Wichert, *que hasta cerca de 300 kilómetros de profundidad se mantiene sensiblemente constante, variando sólo de 7 a 8 kilómetros por segundo ; después aumenta hasta llegar al valor de 12,3 kilómetros por segundo hacia la profundidad de 1500 kilómetros. Desde ese punto hasta el centro la velocidad quedaría sensiblemente constante alcanzando la velocidad el valor de 12,8 kilómetros por segundo.*

Esta constancia confirma, según Wiechert, la presencia en el interior de la tierra de un núcleo de hierro y níquel comprimidos como en los meteoritos.

Él sospecha la existencia de este núcleo, también con motivo de los fenómenos de dispersiones. Según las últimas investigaciones de Geiger y Gulember, dijo Wiechert : en aquel entonces, entre las estaciones de Appia y Gottingen se tendría una leve divergencia entre los 1225 y 1500 kilómetros de profundidad, indicando este hecho que del núcleo central no se pasa directamente a la costra rocosa (litosfera), pero a través de un estado intermedio en el cual disminuye la velocidad de propagación.

El profesor Wiechert habló después acerca de los sismogramas de terremotos lejanos, con respecto a las primeras ondas, y a las maximales. Dijo que ha observado que la hodógrafa de los primeros tremores preliminares no puede ser seguida en todo su recorrido con claridad en los 20.000 kilómetros de la semicircunferencia del globo. Parece que entre las distancias epicentrales de 10.000 y 15.000 kilómetros, los datos de los sismógrafos horizontales faltan de modo extraño. Los registros sísmicos reaparecían después a una distancia epicentral comprendida entre 15.000 y 17.000 kilómetros, pero *con algún atraso con respecto a los tiempos que se obtienen extrapolando la hodógrafa Zeissig.*

La posibilidad de esta dispersión es sostenida por los profeso-

res Love y Kövesligelhy y negada por el profesor Schüster. Se pone en evidencia, después, la pequeña influencia de la profundidad del hipocentro sobre la hodógrafa.

A continuación, el profesor Wiechert dice que él piensa que las ondas maximales u ondas lentas de Raylegh pueden servir para la determinación de la profundidad de la costra terrestre, la cual debe ser diferente porque son varios los períodos de las ondas lentas. Y a propósito, es muy importante cuanto dijo después el doctor Roosenem, que en Gottingen encontró que las ondas lentas tengan un período de 12^s para los terremotos de origen asiático, y 18^s para los de origen americano.

Todos los congresales están de acuerdo en admitir que para obtener una buena hodógrafa se necesita unificar las estaciones.

Después el profesor Schüster presenta el medidor de ondas máximas, inventado por el profesor Darwin y construído por Morris Airey, y que fué instalado en las cercanías de Newcastle. Después del pasaje de 120 ondas, la pluma vuelve a la ordenada cero, describiendo sobre el papel una línea en forma de espiral, tanto menos inclinada cuanto más grande es el número de las ondas que pasan en un tiempo dado. Los pocos registros obtenidos hasta entonces, proporcionaron como período medio de las ondas, un valor comprendido entre 6^s y 7^s.

El profesor Heker confirma el valor de 6^s que él observó en las costas de Appia con mar bravo, y en sus viajes en el Atlántico, Pacífico, e Índico. El profesor Wiechert confirma que en Göttingen, él también encontró un período de 6^s y piensa que las pequeñas ondas marinas regulares tengan sobre los microsismos tal vez mayor influencia que las grandes ondas regulares.

El profesor Klotz también dice que en las costas canadienses, encontró en los microsismos un período medio de 6^s a 7^s; y el profesor Navarro Nauman, a su vez, confirma esos valores por observaciones por él efectuadas en Cartuja, respecto a microsismos que preceden las depresiones barométricas.

Observa el profesor Bertoly que el valor del período de los microsismos disminuía a medida que se avanza hacia el interior, siendo, según sus observaciones, sólo de 3^s a 4^s, a 40 kilómetros de la costa, internándose; observaciones éstas confirmadas por Sig Walter, en Escocia.

El profesor Reid habla acerca de los valores de la intensidad de

algunos célebres macrosismos, y dice que él espera deducirlas basándose en la proposición: que la energía es proporcional al cuadrado de la superficie encerrada en una dada isosista.

En fin, la mayor parte de los delegados leen sus relaciones con respecto a la organización sísmica de sus respectivos países.

En esas hay algunas noticias muy importantes: así, por ejemplo, el profesor Lagrange, delegado de Bélgica, dice que su gobierno ha decidido instalar tres estaciones sísmicas en la región del Congo, cerca del lago Alberto. Esa medida es muy feliz porque el lago Alberto está muy próximo al antípodo de la bien conocida estación insular del océano Pacífico.

El delegado de Rusia expone acerca de la nueva y grandiosa organización del servicio sísmico de su país, y, en fin, los delegados de Inglaterra y Rumania anuncian la adquisición, por sus respectivos países, de los aparatos Galitzin.

Se trataron después algunas cuestiones de índole financiera y burocrática, y por aclamación se fijó que la próxima reunión tendría lugar en San Petersburgo en el año 1914.

Pero el hombre propone y el destino dispone: una gigantesca perturbación, no de orden sísmico, anuló sin más dicha decisión; así que la reunión de Manchester, como dije, representa hasta la fecha el último Congreso de la Asociación internacional de sismología.

Ahora que sumariamente he expuesto algunos de los más importantes argumentos agregando ciertos detalles, vamos a ver si a 10 años de distancia del Congreso, podemos hacer de tímido puentecillo entre algunas cuestiones entonces tratadas y los estudios sismológicos efectuados en la Argentina mientras se espera que los cultores de las disciplinas de la física matemática resuelvan los arduos problemas que la sismología moderna impone, lanzando soberbiamente el sólido puente definitivo.

Así haciendo, se estudiará nuestra morada, nuestro globo... tan desconocido.

Hemos visto que el profesor Wiechert habla de una «sombra sísmica», es decir, repitiendo, que la hodógrafa de los primeros tremores preliminares no se puede seguir claramente a lo largo de los 20.000 kilómetros de la circunferencia del globo; y que entre las distancias epicentrales de 10.000 a 15.000 kilómetros los datos de los péndulos

horizontales faltan de una manera extraña, reapareciendo las registraciones desde los 15.000 a los 17.000 kilómetros. De esto Wiechert, como hemos visto, arguye una « sombra sísmica » entre los 10.000 y 15.000 kilómetros, sugiriéndole la idea de una dispersión sísmica debida a un núcleo central que haría de pantalla, que él supone de níquel y de hierro.

La afirmación de Wiechert respecto a la falta de registraciones de los primeros tremores preliminares entre la distancia epicentral de 10.000 a 15.000 kilómetros me parece que no fué confirmada en muchos casos, entre los cuales, por ejemplo, tenemos el terremoto de Ceram del 29 de septiembre de 1899, muy cuidadosamente estudiado por el profesor alemán M. E. Rudolph, cuyos resultados fueron publicados en 1903 en *Beitraege zur geophisik.*

Respecto a ese terremoto, los primeros tremores preliminares fueron registrados en 12 estaciones cuyas distancias epicentrales medidas directamente varían desde 10.982 hasta 15.923 kilómetros, como puede verse en el siguiente cuadro :

Terremoto de Ceram (Rudolph)

Estaciones	Distancia epicentral de las estaciones en kilómetros
Batavia	2.422
Tokio	4.472
Calcuta	5.200
Bombay	6.560
Dorpat	10.982
Victoria	11.579
Le Cap	11.627
Lenbach	12.084
Hamburg	12.129
Trieste	12.116
Göttingen	12.209
Padova	12.302
Quarto Castello	12.404
Strassburg	12.475
Paisleg	12.800
Córdoba	15.923

También en el terremoto de Guatemala, del 10 de abril de 1902, descrito por Rokstoch en *Nature* (t. 66-67), y analizado por Imamura,

sismólogo japonés, en el *Bulletin of the Earthquake investigations Committee,* número 16, tenemos cuatro estaciones que registraron los primeros tremores preliminares y cuyas distancias epicentrales varían entre 11.189 y 12.667 kilómetros como puede verse en el siguiente cuadro:

Terremoto de Guatemala

Estaciones	Distancia epicentral de las estaciones en kilómetros
Toronto	3.422
Victoria	4.800
Edimburg	8.555
Bidston	8.578
San Fernando	8.600
Shide	8.744
Kew	8.822
Wellington	11.189
Christchurch	11.511
Tokio	12.278
Le Cap	12.667
Bombay	15.922
Calcuta	15.933
Perth	16.667
Batavia	17.855

Y así yo podría citar otros ejemplos de registraciones de los primeros tremores preliminares para estaciones ubicadas entre las distancias epicentrales de 10.000 a 15.000 kilómetros.

Hemos visto más arriba que el doctor Wiechert llamó la atención de los congresales sobre la hodógrafa de Zeissig, considerada como internacional, haciendo notar que los valores que se obtienen de esa hodógrafa extrapolada, después de una cierta distancia epicentral, proporciona valores que son sensiblemente más pequeños que los verdaderos, y haciendo votos para que sea recogido un nuevo y escogido material para poder construir una nueva hodógrafa que se acerque todavía con más aproximación a la determinada por Zeissig.

El príncipe de Galitzin en su brillante obra de sismología, *Conferencias sobre sismología,* 1911, haciendo mención a cuanto se dijo al respecto en el Congreso, dice:

« Estos números (refiriéndose a los valores de las *t*, de tabla de Zeissig) no deben considerarse como absolutamente exactos, pero

aunque dentro de poco se obtendrán, sin duda, curvas más aproximadas, la tabla de Zeissig nos da en general resultados que concuerdan muy bien con las observaciones.

Y más adelante agrega:

« Lo que sería muy importante, sobre todo, es obtener valores exactos del tiempo de propagación *t*, correspondientes a distancias epi centrales mayores de 13.000 kilómetros. Esto no sólo nos permitiría encontrar la posición del epicentro en terremotos muy lejanos, sino deducir la velocidad de las ondas longitudinales y transversales en las capas próximas al centro de la Tierra. Pero hasta ahora, la forma de la curva de propagación para distancias mayores de 13.000 kilómetros, es muy inciertamente conocida.

Según opina Wiechert esta curva entre $\Delta = 13.000$ kilómetros y $\Delta = 16.000$ kilómetros muestra una interrupción, pues las ondas sísmicas no llegan al lugar de observación a consecuencia de reflexiones y refracciones en el interior de la Tierra. Hay, pues, a esta distancia, probablemente lo que podríamos llamar una zona de sombra sísmicamente considerada.

« Desde $\Delta = 16.000$ hasta $\Delta = 20.000$ kilómetros, media circunferencia terrestre, *la curva de propagación es notablemente más elevada* y no se puede considerar como una continuación de las anteriores. Pero este resultado necesita, sin embargo, una investigación más amplia. »

También el doctor Navarro Nauman, ilustrado sismólogo español, director de la Estación sísmica de Cartuja, que fué uno de los congresales, en su óptimo trabajo *Terremotos, sismógrafos y edificios,* aparecido en Madrid en el año 1916, menciona cuanto más arriba he expuesto, relativamente a la hodógrafa Zeissig.

Hoy día no hay más duda alguna sobre estas tres verdades:

1ª La velocidad de los primeros tremores preliminares se mantienen sensiblemente constantes con el valor de 7,4 kilómetros segundo hasta la distancia epicentral que varía desde 1000 hasta cerca de 1800 kilómetros, dependiendo esta distancia, como demostré en otro trabajo *(Determinación de la profundidad de la costra terrestre),* de la profundidad hipocentral;

2ª Después, la velocidad aumenta continuamente; con rapidez primero, mas lentamente después, hasta una cierta distancia epicen-

tral que yo determiné en otro trabajo en 10.618 kilómetros. El movimiento correspondiente será acelerado;

3ª En fin, después de esta distancia, la velocidad tiende rapidísimamente a hacerse constante, es decir, el movimiento tiende con rapidez a hacerse uniforme.

Tendremos, en consecuencia, que hasta la distancia de 1000 ó 1800 kilómetros, como dije, la hodógrafa del movimiento será representada por una recta, y después por una parábola hasta la distancia de cerca de 10.600 kilómetros.

Después, la hodógrafa, dado que el movimiento tiende rapidísimamente a hacerse uniforme, tenderá, también, rapidísimamente a una recta, y, sin sensible error, se podrá considerar como tal, la tangente geométrica. Las ordenadas satisfacen plenamente a las observaciones de Wiechert, como puede verse fácilmente en otros trabajos ya publicados.

Así que, ahora, no hay más que esperar por las soluciones o las discusiones de las cuestiones planteadas, que se convoque a un nuevo congreso, y esperemos que la Argentina, esta vez quiera activamente participar en ello.

MICROMYCETES NONNULLI BRASILIENSES

POR CARLOS SPEGAZZINI

Praeclarus Dominus Ferdinandus Silveira, celeberrimi Horti Botanici Januariensis Brasiliae Custos, specimina plurima Acaciae specierum, studii fini, benevolentissime mihi misit; quum mycetes nonnulli in exemplaribus illis invenissem, eos publico jure facio et Mittenti gratiam quam maximam do.

1. **Sphaerophragmium Silveirae** Speg. (n. sp.).

Diag. Maculae nullae v. parvae amphigenae indeterminatae pallescentes; acervuli hypophylli pusilli saepius solitarii, erumpentes ferruginei; teleutosporae, adhuc tantum inventae, e fronte subglobosae, e latere subhemisphaericae v. subtrigonae, 3-9-cellulares, episporio tenui in dimidio supero verruculis saepius 2-3-dentatis adsperso vestitae, inferne laeves et pedicello e tereti turbinato hyalino breviusculo fultae.

Hab. Ad foliola viva *Acaciae pedicellatae* in silvaticis prope Rio de Janeiro, Sept. 1921.

Obs. Species difficillime perspicienda ob acervulorum minutiem; acervuli hinc inde sparsi semilenticulares (75-150 μ diam.) primo epidermide tecti dein erumpentes; teleutosporae dense constipatae sublenticulares (45-50 μ × 30-35 μ alt.), parte dimidia supera verruculoso-aspera, verruculis 2-2,5 μ alt., hyalinis, episporio tenuiusculo (1-2 μ) lateritio; stipes subcylindraceus ex apice (5 μ) basin versus sensim attenuatus (10-15 μ lng.) laevis hyalinus.

2. **Uredo alemquerensis** Speg. (n. frm.).

Diag. Maculae nullae; acervuli hypophylli minuti, sparsi, erumpentes pallide cinnamomei; uredosporae globosae ochraceae, episporio modice incrassato laevi vestitae, poris germinantibus 2 v. 3 aequatorialibus.

Hab. Ad folia viva *Acaciae alemquerensis* in silvis secus rio Parú, prov. Pará, Jul. 1919.

Obs. Species characteribus specificis fere destituta et ad interim tantum habitatione dignoscenda, ejusdem statum teleutosporicum adhuc ignotum; acervuli semilenticulares (70-100 μ diam.), primo epidermide tecti dein erumpentes nudi subpulverulenti ferruginei; uredosporae saepe e mutua pressione obtuse polygonae (14-16 μ diam.), episporio modice incrassato (2-2,5 μ) laevi praeditae.

3. **Phaeodimeriella guarapiensis** (Speg.) Thsz. = Theizs., Zur Rev. d. Gatt. Dimerosporium, f. 68, n. 98. — *Dimerosporium guarapiense* Speg., Fng. guar., p. II, n. 44.

Hab. Ad foliola nec non legumina viventia *Acaciae pedicellatae* in silvosis prope Rio de Janeiro, Sept. 1921.

Obs. Subiculum tenuissimum aegre perspicuum ex albo cinerascens, mycelio alieno non comitatum, Peronosporam quamdam v. telam Tetranychi simulans, semper sterile, frequenter adest ad hypophyllum foliolorum; in leguminibus autem cum *Meliola acaciarum* semper consociatum, forsan parasitans, et fertile; hyphae repentes laxae irregulariter crispuleque ramulosae (2-5 μ) intricatae, obsolete septulatae, hinc inde nodulos v. fasciculos ramulorum erectorum proferentes; ramuli rectiusculi v. leniter arcuatuli saepe superne attenuati et acutati (30-70 μ × 3-4 μ) continui; conidia non inventa; perithecia sparsa v. paucigregaria superficialia globosa (90-110 μ diam.) pallide olivacea, tenuiter membranacea, contextu parenchymatico parum distincto chlorino praedita, superne fere glabrata, inferne pilis (8-10) rectiusculis v. saepius arcuatulis simplicibus acutis (40-70 μ × 2-3 μ) hyalinis ornata, astoma v. per aetatem obsoletissime irregulariterque subostiolata; asci mox diffluentes et aegre perspicui; sporae elliptico-subclavulatae (14 μ × 6 μ), utrinque rotundatae, medio 1-septatae non v. lenissime constrictae, laeves, primo hyalinae serius olivaceofuligineae.

4. **Meliola acaciarum** Speg. (n. sp.).

Diag. Eumeliola setigera hyphopodiata, peritheciis glabris irregulariter parenchymaticis laevibus astomis; setulis erectis gracilibus, inferne atris opacis, superne molliusculis pellucidis septulatisque fumosis, apice integerrimis obtusis v. fractis; hyphopodiis ampulluliformibus perpaucis, ceteris capitatis laevibus numerosis, saepius oppositis, omnibus fuligineis; ascis ellipticis bisporis; sporis mediocribus exappendiculatis cylindraceo-ellipticis, utrinque obtuse rotundatis, 4-septatis, ad septa non v. vix constrictis, loculis omnibus aequilongis, obscure fuligineis.

Hab. Ad ramulos, petiolos, foliola nec non legumina *Acaciae pedicellatae* prope Rio de Janeiro, Sept. 1921, et *Acaciae polyphyllae* secus rio Tocantins, prov. Pará, Dec. 1916.

Obs. Species ad sectionem E. clarissimi Steveni *(The Genus Meliola in Portorico)* v. inter numeros 203 et 215 tabulae Praeclari Beelii *(Notes sur le genre Meliola)* inserenda, ab affinibus setulis gracilibus sursum saepissime pellucidis et quandoque truncatis conidiiferisque distincta.

Subiculum aterrimum maculiforme amphigenum effusum, matrice arcte adnatum quandoque laxum fere araneosum et omnino glaber, setulis paucis tantum circa perithecia onustum, quandoque confertum dense setuliferum velutino-tomentosum; perithecia sparsa v. hinc inde paucigregaria, globosa, non v. vix subcollabescentia (180-220 μ diam.) astoma glabra laevia non asperata, nigra disculo fulcente destituta sed saepe circum circa setulis cincta, membranaceo-coriacella, contextu atro grosse parenchymatico (cellulis 8-10 μ diam.) vix in juventute pellucido, non radiante; asci elliptici sessiles (50-55 μ × 30-35 μ) aparaphysati bispori, mox diffluentes; sporae cylindraceo-subellipsoideae (35-40 μ × 14-16 μ) exappendiculatae laeves, 4-septatae, ad septa non v. vix constrictae, utrinque rotundatae, loculis omnibus subaequilongis 1-guttulatis, fuligineae; hyphae subiculi rectae v. flexuosulae, opposite v. alterne ramosae (6-8 μ) fuligineae opacae v. vix pellucidae, crebriuscule septatae; hyphopodia dimorpha, nonnulla pauca ampulluliformia longiuscule rostrata (16-18 μ × 6-7 μ), cetera numerosissima capitata (10-15 μ × 7-9 μ), capitulo saepius rotundato v. obsoletissime obtuseque subtrigono, fere semper

opposita, rarius alterna et rarissime unilateralia: setulae erectae v. lenissime arcuatulae (100-300 μ lng.), rectae v. nonnumquam subflexuosulae, graciles (bas. 10 μ, apic. 5-6 μ) in tertiis duobus inferis atrae opacae rigidae, in supremo sensim dilutiores molliores pellucidae septulatae, apice integerrimae rotundatae v. truncatae; conidia, ad apicem setularum truncatarum, facillime caduca, e cylindraceo subfusoidea (50-70 μ × 10 μ) saepius arcuatula, utrinque subacutiuscule rotundata, 5-9-septata, ad septa non constricta, laevia olivascenti-fumosa.

5. **Sphaerella Silveirae** Speg. (n. sp.).

Diag. Maculae nullae v. matrix tota pallescens; perithecia sparsa v. laxe gregaria, lenticularia, epidermide tecta, superne atra, inferne achroa, tenuiter membranacea parenchymatica, minute ostiolata; asci ovati v. obclavatuli, antice obtusissimi crassiusculeque tunicati, postice breviter noduloseque pedicellati, octospori, aparaphysati; sporae 2-3-stichae, subcylindraceo-clavulatae, utrinque rotundatae, medio 2-septatae non v. vix subconstrictae, loculis aequilongis, hyalinae.

Hab. Ad rachides pinnularum languentium *Acaciae pedicellatae* in silvosis circa Rio de Janeiro, Sept. 1921.

Obs. Species pulcherrima biogena; maculae nullae v. matrix tota obsolete pallescens; perithecia hinc inde sparsa, saepius dorsalia, non v. vix prominula, epidermide velata, atra, lenticularia (100-150 μ diam.), ostiolo rotundo (15-20 μ diam.) pertusa, contextu tenui membranaceo parenchymatico superne atro et bene perspicuo, inferne hyalino subinvisibili; asci pauci constipati parvi (18-22 μ × 10-14 μ) tunica tenui ad apicem vix incrassata vestiti; sporae rectae (10-14 μ × 4-5 μ) utrinque rotundatae, laeves hyalinae.

6. **Parapeltella minuscula** Speg. (n. sp.).

Diag. Maculae et subiculum plane nulla; thyriothecia superficialia sparsa minutissima, substrato arcte adnata, glabra, astoma, tenui membranacea, contextu radiante parum manifesto olivaceo; asci e cylindraceo ovati, sursum subtruncato-rotundati, deorsum subcuneato-rotundati, brevissime minuteque pedicellati, octospori, aparaphysati; sporae subtristichae, elliptico-subcylindraceae utrinque subacutiuscule

rotundatae, 3-septatae, ad septa non constrictae hyalinae.

Hab. Ad legumina viventia *Acaciae altescandentis* secus rio Xingú, prov. Pará, Dec. 1919.

Obs. Species perpusilla sat difficile perspicienda, omnino superficialis et sparsa; thyriothecia orbicularia (80-100 μ diam.) atra, astoma (specimen tamen tribus perforationibus rotundis 8-10 μ diam. donatum inveni), ambitu vix denticulata, membranacea, contextu radiante minuto parum perspicuo olivaceo; asci pauci constipati (20 μ × 8-10 μ), ubique tenuiter tunicati; sporae rectae (10 μ × 3 μ), ad septa non v. vix constrictae laeves. Commixta cum thyriotheciis ascophoris pycnidica saepe inveniuntur, sporulis elliptico-subglobosis (2 μ × 1,25 μ) hyalinis laevibus farcta.

7. **Phyllosticta Silveirae** Speg. (n. frm.).

Diag. Maculae parvae orbiculares amphigenae determinatae albae, linea tenui callosa rufescente cinctae; perithecia epiphylla, parenchymate innata, epidermide tecta, lenticularia atra minuta membranacea, ostiolo obsoleto, contextu indistincto olivaceo; sporulae ellipticae utrinque subacutiuscule rotundatae pusillae hyalinae.

Hab. Ad foliola viva *Acaciae pedicellatae* in dumetosis circa Rio de Janeiro, Sept. 1921.

Obs. Maculae saepius parvulae (1-3 mm diam.) contra lucem inspectae pellucidae; perithecia sub epidermide vix prominula (75-100 μ diam.) glabra, diu epidermide tecta, serius tamen erumpentia, ostiolo in speciminibus perscrutatis non invento, contextu obsolete minuteque parenchymatico; sporulae (4-5 μ × 2-3 μ) laeves, quandoque minute biguttulatae.

8. **Pestalozzia acaciicola** Speg. (n. frm.).

Diag. Maculae nullae; acervuli epiphylli lenticulares saepius laxe gregarii, erumpentes, atri; conidia clavato-subfusoidea, 4-septata, saepe leniter inaequilateralia, loculo supremo minimo hyalino, setulis 3 tenuissimis longis divaricatis praedito, infimo achroo elongato turbinato, in pedicello parvulo concolore producto, tribus internis olivaceis donata.

Hab. Ad foliola languida sed adhuc viva *Acaciae polyphyllae* in silvis secus rio Tocantins, prov. Pará, Dec. 1916.

Obs. Acervuli lenticulares (150-200 μ diam.) epidermide primo tecti sed valide convexo-prominuli, serius erumpentes atri; conidia constipata, sursum abrupte, deorsum sensim cuneato-attenuata (20-24 μ × 7-8 μ), apice setulis tribus (20-25 μ × 0,5 μ) patentissimis coronata, basi pedicello brevi (5-6 μ × 1 μ) hyalino suffulta, ad septa non v. vix constrictula.

9. **Cercospora alemquerensis** Speg. (n. frm.).

Diag. Maculae nullae; acervuli hypophylli sparsi globoso-depressi, parvi, olivacei; hyphae dense constipatae, fere in sporodochio connatae, 2-3-septatae, fumoso-olivascentes, articulo infero elliptico crasso, superis angustis subcylindraceis saepius nonnihil flexuosis obsolete subangulato-denticulatis pallidioribus; conidia subfusoideo-cylindracea, arcuatula, utrinque obtusiuscule rotundata, 1-3-septata, laevia, fumoso-olivacea.

Hab. Ad foliola viva *Acaciae alemquerensis* in silvis secus rio Parú, prov. Pará, Jul. 1919.

Obs. Foliola infecta fere normalia sed saepius tota obscurius colorata; acervuli superficiales (150-200 μ diam.), primo olivacei serius subrufescentes, sparsi v. hinc inde laxe pauci-gregarii; hyphae ima basi coalitae subradiantes (50-90 lng.) articulo infimo crasso (25-35 μ × 14-16 μ), uno v. duobus superioribus superpositis (5-6 μ) flexuosis v. nodulosis pallidioribus; conidia leniter falcata (40-60 μ × 12-14 μ) utrinque obtusula, ad septa non constricta chlorina.

10. **Arthrobothryum alemquerense** Speg. (n. frm.).

Diag. Saepius hypophyllum setiforme, laxe gregarium, aterrimum opacum, stipitibus teretibus tenuibus erectis, rectis v. leniter arcuatulis, laevibus, basi modice subpeltato-dilatatis adfixisque. sursum sensim leniterque attenuatis, apice abruptiuscule in capitulo parvo obovato papilluloso-sterigmatophoro expansis; conidia cylindracea, rectiuscula, utrinque plus minusve rotundata, primo hyalina 10-15-blasta, dein fumosa 9-14 septata, non constricta, laevia.

Hab. Ad folia viva *Acaciae alemquerensis* in silvis secus rio Parú, prov. Pará, Jul. 1919.

Obs. Foliola infecta colorationem obscuriorem et maculam obsoletam cinerascentem subdeterminatam saepius proferentia,

thallo subiculoque tamen omnino destituta; stipites semper simplices, spatio 0,5-1 mm inter se remoti, pilos atros tenuissimos subrigidulos (750-1200 μ alt.) simulantes, basi disculo (150 μ diam.) matrici adfixi, teretes, e basi (30-35 μ) sursum sensim leniterque attenuati, apice (20 μ diam.) in capitulo obovato (50 μ × 40 μ) minute breviter denseque papilloso-sterigmatifero abruptiuscule inflati; contextus stipitum imperspicuus sed ad apicem subpellucidus ex hyphis gracilibus (2 μ) flexuosulis septulatis fumosis conflatus videtur; capitulum sub Jove pluvio glutinoso-viscosulum evadit; conidia recta (20-60 μ × 5-6-10 μ) ad septa numquam constricta. Species primo obtutu, ob setularum fabricam, Strigularum habitum in mente revocans sed thalli deficientia absoluta mox dignoscenda.

EXPLICATIO TABULAE

Sphaerophragmium Silveirae Speg. (n. sp.) : 1. Folium infectum; 2. Teleutospora e latere visa; 3. Teleutosporae superne visae; 4. Frustulum episporii verruculis onustum.

Phaeodimeriella guarapiensis (Speg.) Thzs. : 5. Fragmentum subiculi ramulos erectos et perithecia proferens; 6. Perithecium separatum; 7. Setula perithecii; 8. Ascosporae.

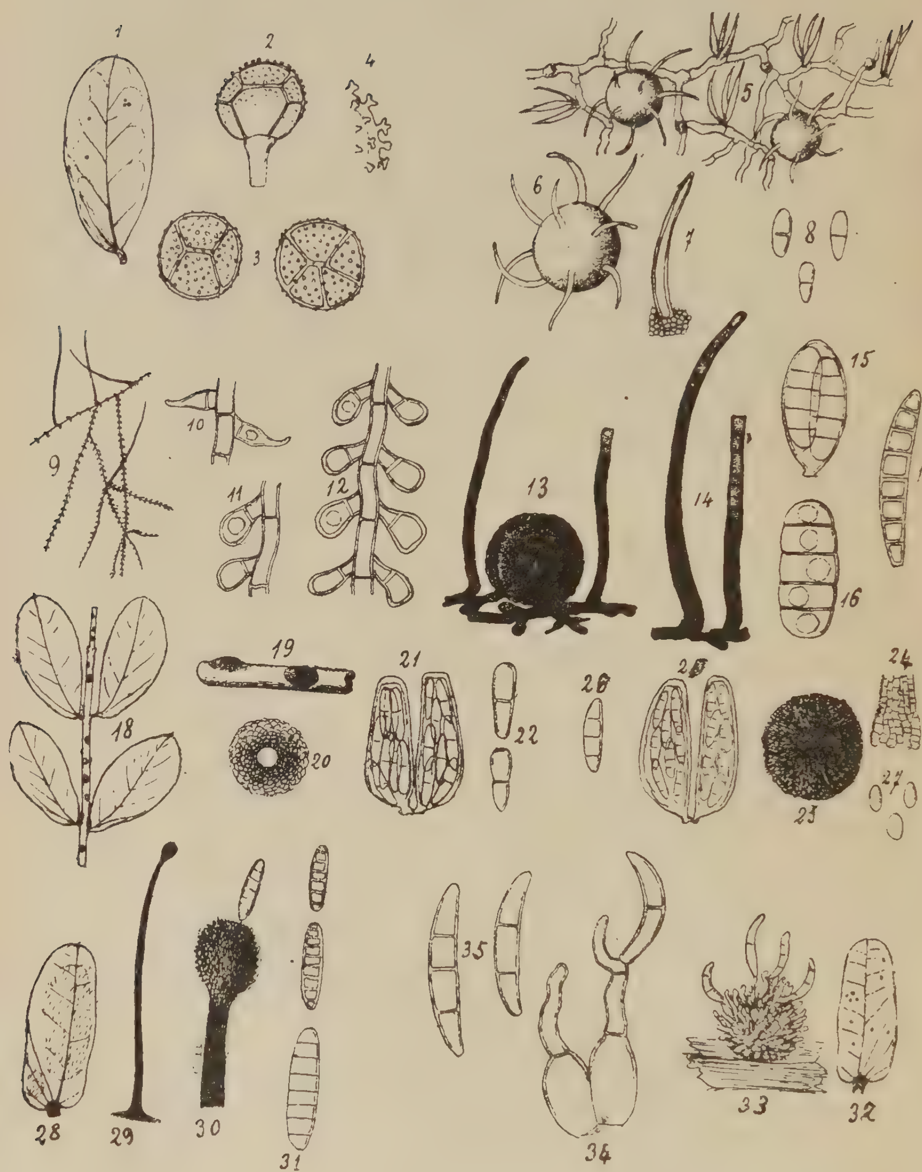
Meliola acaciarum Speg. (n. sp.) : 9. Fragmentum subiculi; 10. Particula hyphae subiculi hyphopodia ampulluliformia proferens; 11. Particula hyphae subiculi hyphopodiis capitatis unilateralibus donata; 12. Particula hyphae subiculi hyphopodiis capitatis oppositis praedita; 13. Perithecium e latere visum setulis cinctum; 14. Setulae subiculi; 15. Ascum; 16. Ascospora matura; 17. Conidium.

Sphaerella Silveirae Speg. (n. sp.) : 18. Pars pinnae folii rachidem infectam ostendens; 19. Frustulum racheos perithecia bina ferens; 20. Perithecium superne visum, ostiolum et contextum patefaciens; 21. Asci; 22. Ascosporae.

Parapeltella minuscula Speg. (n. sp.) : 23. Thyriothecium superne visum; 24. Frustulum thyriothecii contextum exhibens; 25. Asci; 26. Ascosporae; 27. Pycnidia.

Arthrobotryum alemquerense Speg. (n. frm.) : 28. Foliolum infectum; 29. Stroma integrum separatum; 30. capitulum stromatis; 31. Conidia.

Cercospora alemquerensis Speg. (n. sp.) : 32. Foliolum infectum; 33. Sporodochium; 34. Hyphae conidiiferae; 35. Conidia.


1
2
4
5
3
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
1
16
18
19
21
22
26
25
24
20
23
27
28
29
30
31
35
34
33
32

HIMENÓPTEROS Y DÍPTEROS DE VARIAS PROCEDENCIAS

POR EL DOCTOR JUAN BRÈTHES

Las múltiples consultas — cada día más numerosas — que recibo de todas partes para la determinación de insectos de todos los órdenes, indican la importancia cada vez mayor que se da a estos animales en la economía de los países.

Muchos de los insectos que he estudiado son ya conocidos y algunos solamente constituyen novedades científicas.

Creo que sería ocioso y de ninguna utilidad el dar a la imprenta una lista escueta de todos esos insectos determinados y conocidos ya; opino que ello representa un aporte científico tan sólo cuando es el resultado de una expedición o cuando es la enumeración de los animales existentes en una región dada. Me contentaré, por el momento, con publicar los insectos que me han resultado nuevos, y que luego tendrán su lugar señalado en un trabajo de conjunto que estoy preparando desde muchos años atrás.

Séame aquí permitido agradecer la confianza que me han dispensado el doctor Edmundo Escomel, de Arequipa (Perú), el doctor Ernesto Ronna, veterinario de los Estados Unidos del Brasil, en Pelotas (Río Grande do Sul), los doctores Johnson y W. B. Alexander, delegados del Institute of Science and Industry de Melbourne (Australia), quienes realizaron una expedición científica en nuestro país especialmente en busca de parásitos para la destrucción de las Cactáceas, que constituyen una plaga en los estados de Victoria y New South Wales, el señor Francisco Sathicq (hijo), de la estación Mosconi (F. C. S.), los señores ingenieros Lorenzo R. Parodi, J. R. Báez, etc.

Al agradecer a todos esos señores la confianza que me han dispensado, hago éxtensivo mi agradecimiento a la Sociedad Científica Argentina que en varias oportunidades me ha brindado sus columnas para estas publicaciones, según el deseo que me manifestara el señor director del Museo nacional, don Carlos Ameghino.

I. — HIMENÓPTEROS

Fam. APIDAE

CALLONYCHIUM Brèthes, n. gen.

Inter Nomadinarum. Glossa longa, paraglossis brevibus, palpis labialibus 4 articulatis, 1° elongato, compresso, sequentibus 3 brevibus, cylindricis, subaequalibus, palpis maxillaribus 6-articulatis, labro clypeo majore, mandibulis simplicibus, apice acutis, antennis brevibus, articulis funiculi brevibus, transversis, apicem versus tantum magis elongatis, ocellis in triangulo dispositis, scutello normale, abdomine ovato, in medio magis ampliato, segmento 6° sine facie pygidiali, apice rotundato, alis cellula radiali apice truncata et appendiculata, cellulis cubitalibus 2 clausis, 1ª paulum majore, 2° nervos recurrentes accipiente, cellula mediana submediana sat longiora, tibiis posticis bicalcaratis, unguibus simplicibus, pilis in abdomine et in pedibus posticis haud polliniferis, corpore nigro-flavo-picto.

Callonychium argentinum Brèthes, n. sp.

♀. *Niger, labro (in medio transverse piceo), clypeo marginibus lateralibus, facie maculis 5 supra clypeum, linea postoculari, pronoto linea utrinque ampliata, scutello puncto laterali et margine postico anguste, tegulis, postscutello, segmento mediario macula utrinque postice, segmento 1° abdominis linea transversa arcuata, segmentis 2-4 maculis 2, tibiis anticis intus flavis; genubus flavescentibus, antennis funiculo ferrugineo, tibiis obscure ferrugineis, alis hyalinis. Long.: 6,5 mm.*

En general la puntuación es microscópica; sólo el clípeo con una puntuación visible, no densa. Una línea impresa en la cara, al lado

interno de cada ojo; pelos finos detrás de la cabeza el mesonoto con una línea mediana un poco impresa; el escudete apenas abovedado; el segmento mediario con una área ligeramente impresa en la base, detrás del postescudete; mesopleuras con un hoyuelo subalar; pelos blanquecinos, no densos, en el tórax, aun menos abundantes en el dorso. Abdomen oval, los 1-4 segmentos con un reborde posterior separado de la parte anterior por una cresta viva; el 5° segmento con algunos pelos, más numerosos en el dorso y rojizos, y con una puntuación más visible, las tibias y los tarsos con pelos de un blanco sucio, no poliníferos.

El señor doctor W. B. Alexander recogió la hembra que me sirve de tipo, sobre flores de *Opuntia utkilio,* en Catamarca, el 7 de febrero de 1921.

En général la ponctuation est microscopique : seul le clypéus a une ponctuation visible, non dense; une ligne imprimée au bord interne de chaque œil; des poils fins derrière la tête. Mésonotum avec une ligne médiane un peu imprimée, l'écusson à peine bombé, le segment médiaire avec une aire basale légèrement imprimée derrière le post-écusson, les mésopleures avec une fossette sous-alaire; des poils blanchâtres non denses au thorax, moins nombreux sur le dos. Abdomen ovalaire, les 1-4 segments avec un rebord postérieur séparé de la partie antérieure par une crête vive, le 5e segment avec quelques poils plus nombreux au dos et roussâtres et avec une ponctuation plus visible; les tibias et les tarses avec poils non pollinifères d'un blanc sale.

Monsieur le docteur W. B. Alexander recueillit la ♀ qui me sert de type sur une fleur de *Opuntia utkilio,* à Catamarca, le 7 février 1921.

ARHYSOSAGE Brèthes, n. gen.

Lingua elongata, paraglossis minutis, palpis labialibus 4-articulatis, 2 primis compressis, 2 ultimis cylindricis, brevibus. Palpis maxillaribus 6-articulatis, mandibulis arcuatis, apice bidentatis, seu prope apicem dente interno munitis, labro modice evoluto, clypeo transverso (ut in Psaenythia), antennis brevibus, articulis transversis, 2° 3° tantulum majore, facie lata, striga suboculari instructa, ocellis in linea vix recta dispositis, thorace subsphaerico, scutello et postscutello normalibus, abdomine modice depresso, breve ovato, in medio magis lato, cellula

radiali apice ad costam oblique transversa et appendiculata, cellulis cubitalibus 2 clausis, 1ª 2ª tantulum majore, 2ª venas recurrentes accipiente, cellula mediali submediali tantum majore, abdomine et pedibus haud pollinigeris, tibiis posticis bicalcaratis, unguibus bifidis.

Arhysosage Johnsoni Brèthes, n. sp.

♂ *Pilositati flavescente brevi et haud appressa in capite, thorace et abdomine subtus. Corpore minutissime punctato, modice nitente. Capite, thorace, pedibus scapoque flavis; mandibulis albidis, apice fuscis; strigis faciei, et incisuris nonnulis thorace angustissime nigris. Abdomine ferrugineo testaceo, segmentis fascia flava ornatis. Alis hyalinis, venis testaceis, subcostali et stigmate fuscis. Long. : vix 10 mm.*

1 ♂ colectado en Andalgalá sobre flor de *Echinopsis* sp. el 11 de febrero de 1921, por el señor doctor W. B. Alexander.

Fam. PSAMMOCHARIDAE

Psammochares Escomeli Brèthes, n. sp.

Capite thoraceque viridi-pellucidis, pedibus subcyaneo-pellucidis, abdomine rubro, alis sat fuscis, paulum violaceo-micantibus. Long. : 8 mm. Alae : 6 $^1/_2$ mm.

La cabeza y el tórax tienen una pelucilla verde uniforme, aquélla con algunos pelos negros y largos bastante esparcidos, así como el escapo. El clípeo es subconvexo, truncado en la extremidad, sus ángulos redondeados. Las antenas alcanzan casi la extremidad del tórax, las ocelas en triángulo pequeño, las posteriores un poco más próximas entre sí que de los ojos. Borde posterior del pronoto anguloso. Segmento mediario convexo, una línea longitudinal impresa en el medio. Abdomen sesil, un poco deprimido. La célula submediana un poco más larga que la mediana; las células cubitales 2 y 3 más o menos iguales; el borde radial de la 3ª cubital apenas más corto que la 2ª vena transverso-cubital; la 2ª recurrente cayendo en el medio de la 3ª célula cubital. Uñas simples.

Sabandia (Perú), XII-1919. E. Escomel leg.

La tête et le thorax sont couverts d'une pruinosité verte uniforme et celle-là a quelques poils longs noirs assez épars ainsi que le scape. Le clypéus est subconvexe, tronqué au bout, ses angles arrondis. Les antennes atteignent presque l'extrémité du thorax, les ocelles en triangle petit, les postérieurs un peu plus rapprochés entre eux que des yeux. Bord postérieur du pronotum anguleux. Segment médiaire convexe, une ligne longitudinale imprimée au milieu. Abdomen sessile, un peu déprimé. La cellule submédiane un peu plus longue que la médiane; les cellules cubitales 2 et 3 à peu près égales; le bord radial de la 3e cubitale à peine plus court que la 2e veine transverso-cubitale, la 2e récurrente tombant sous le milieu de la 3e cellule cubitale. Ongles simples.

Sabaudia (Pérou), XII-1919; E. Escomel leg.

Fam. PROCTOTRUPIDAE

Synopeas neurolasiopterae Brèthes, n. sp.

Niger, nitidus, scapo, trochanteribus, basi femorum, tibiis et tarsis testaceis, alis hyalinis. Long. : 1,2 mm.

Cabeza lisa, finamente *chagrinée* lo que se cambia más adelante, cerca de las antenas, en una fina estriación transversa; las ocelas distantes de los ojos de un ancho igual al doble de su diámetro. Las antenas con el escapo largo, engrosado hacia la extremidad, un poco más largo que los 4 artículos siguientes, el 2° y 3° con el ángulo apical externo bastante pronunciado. Mesonoto liso, muy finamente *chagriné,* con las dos líneas parapsidales casi invisibles. Escudete circular con una espina corta en la extremidad.

Escamas alares lisas, negras. Alas hialinas. Abdomen largo, ovoide, con una fina pubescencia en la base y en los últimos segmentos.

Parásito de *Neurolasioptera Baezi* Brèthes (ver más adelante).

Tête lisse, finement chagrinée; ce chagriné se change en avant près des antennes en une fine striation transverse. Les ocelles distants des yeux d'un largeur égale au double de leur diamètre. Les antennes avec le scape long, grossi vers l'extrémité, un peu plus long que les 4 articles suivants, le funicule à premier article obconique, les trois suivants cylindriques, subégaux, le dernier obconique, court; la mas-

sue de 4 articles, les deux et trois à angle extérieur assez prononcé. Mésonotum lisse, très finement chagriné, avec les deux lignes parasipdales presque invisibles. Écusson circulaire avec une épine courte à l'extrémité. Ecailles alaires lisses, noires. Ailes hyalines, abdomen long, ovoïde, avec une fine pubescence à la base et aux derniers segments.

Parasite de *Neurolasioptera Baezi* Brèthes (voir plus loin).

Fam. CHALCIDIDAE

Spilochalcis 20-dentata Brèthes, n. sp.

Flava. Nigri sunt : macula faciali prope clypeum, antennae (scapo subtus flavo), scrobae antennarum, occiput, linea longitudinali ab occipite usque ad apicem scutelli, mesonoto antice posticeque, lineae parapsidales, macula in scapulis, margines laterales scutelli, suturae nonnullae in pleuris, margines segmentorum abdominis, coxae posticae macula externa et apice, femores posteriores in linea dentiformi, tibiae posticae cantho externo inferiore. Alae hyalinae, macula stigmali parva fusca. Long. : 5,5 mm.

El clípeo es semicircular, pequeño. La cabeza es lisa, con puntos gruesos bastante distantes y pilíferos, los pelos negros. El mesonoto es estriado transversalmente, con puntos en el fondo de las estrías y pelos negros esparcidos. El escudete es normal, puntuado, con pelos negros esparcidos; sus bordes libres (latero-posteriores) sin puntuación y con una línea impresa. Postescudete un poco estriado transversalmente en los lados. Segmento mediano puntuado con una pequeña apófisis en los ángulos latero-posteriores, arriba de las coxas. Pecíolo del abdomen corto, tan largo como ancho, liso. Abdomen cónico, del largo de la cabeza y tórax reunidos, liso; los dos últimos segmentos puntuados. Fémures posteriores con unos 20 dientecitos subiguales en su canto inferior, el primero apenas mayor que los siguientes. Alas hialinas; las venas negruzcas; el estigma con una manchita negruzca.

Hab. Provincia de Buenos Aires (F. Sathicq leg.).

Le clypéus est petit, semicirculaire. La tête est lisse avec points gros assez espacés et pilifères, les poils noirs. Le mésonotum est strié transversalement, les points dans le fond des stries, avec poils noirs

épars. L'écusson est normal, ponctué, les poils noir épars, ses bords libres (latéro-postérieurs) imponctués et avec une ligne imprimée. Postécusson un peu strié transversalement sur les côtés. Segment médiaire ponctué avec une petite apophyse aux angles latéro-postérieurs, au-dessus des coxas. Pétiole de l'abdomen court, aussi long que large, lisse. Abdomen conique, de la longueur de la tête et du thorax réunis, lisse; seuls les deux derniers segments ponctués. Cuisses postérieures avec une vingtaine de petites dents subégales au bord inférieur, la première à peine plus grande que les suivantes. Ailes hyalines, les veines noirâtres, le stigma avec une macule noirâtre.

Prodecatoma Parodii Brèthes, n. sp.

Nigra, antennis fuscis, scapo, genubus, tibiis apice et tarsis plus minus testaceis, alis hyalinis, venis testaceis. Long.: 1 $^3/_4$ - 2 $^1/_2$ mm.

♀. La cabeza y el tórax con puntos umbilicados, los espacios *chagrinés;* pelos cortos y recostados, blancos. Las escrobas antenares tienen un surco que va hasta la ocela anterior. El escapo alcanza la ocela anterior; el funículo se engruesa insensiblemente hasta la maza. El pronoto, mesonoto y escudete más o menos del mismo largo, las líneas parapsidales bien marcadas, las axilas en contacto con el mesonoto al nivel de las líneas parapsidales. El escudete pasa un tanto arriba del postescudete y del segmento mediario que son prácticamente verticales. El abdomen puede decirse sesil; es liso; su *chagriné* bastante fino; el 2° segmento es más corto; el 3° dos veces más largo que el 2°, y el 4° dos veces más largo que el 3°.

♂. El macho se parece a la hembra, pero las antenas tienen verticilos de pelos del lado externo; el abdomen es bien pedunculado; las antenas tienen el escapo y el pedicelo amarillos y el resto más o menos obscurecido; las patas son amarillas.



Fig. 1

Produce agallas en las ramas de *Prosopis alba,* las que me ha comunicado el señor ingeniero Parodi, a quien gustoso dedico esta especie de avispa.

Esas agallas (fig. 1) son fusiformes, más o menos alargadas, pluriloculares y lanosas. El señor Parodi las ha conseguido en Santo Tomé, provincia de Santa Fe, en enero de 1920.

♀. La tête et le thorax avec points ombiliqués, les espaces chagrinés; des poils blancs courts et couchés. Les scrobes antennaires en un sillon qui va jusqu'à l'ocelle antérieur. Le scape atteint également l'ocelle antérieur; le funicule grossit insensiblement jusqu'à la massue. Le pronotum, mésonotum et écusson, à peu près d'égale longueur, les lignes parapsidales bien marquées, les axilles touchant le mésonotum au niveau des lignes parapsidales. L'écusson surplombe légèrement le postécusson et le segment médiaire qui sont à peu près verticaux. L'abdomen pratiquement sessile est lisse, son chagriné assez fin; le 2ᵉ segment le plus court; le 3ᵉ deux fois plus long que le 2ᵉ, et le 4ᵉ deux fois plus long que le 3ᵉ.

♂. Le mâle ressemble à la femelle, mais les antennes ont des verticilles de poils à l'extérieur, l'abdomen est bien pédicellé; les antennes ont le scape et le pédicelle jaunes, et le reste plus ou moins obscur; les pattes sont jaunâtres.

Produit des galles sur les branches de *Prosopis alba* que m'a communiquées M. l'ingénieur Parodi à qui je dédie l'espèce avec plaisir.

Ces galles (fig. 1) sont fusiformes, plus ou moins allongées, pluriloculaires et ligneuses. Monsieur Parodi les a obtenues a Santo Tomé, province de Santa Fé, en janvier 1920.

Eudecatoma paranensis Brèthes, n. sp.

Nigra, femoribus apice, tibiis basi apiceque et tarsis albis, alis hyalinis, venis fuscis. Long. : vix 3 mm.

El tórax es opaco con puntos umbilicados; el pronoto transverso, un poco más corto que el mesonoto, éste con las líneas parapsidales bien marcadas; el escudete triangular tan largo como el mesonoto. El postescudete situado debajo del escudete y muy angosto; el segmento mediano situado en un plano inferior, oblicuo; las mesopleuras estriadas arriba de una carena mediana, oblicua; foveoladas debajo de dicha carena. Abdomen con pecíolo corto, un poco más corto que el fémur posterior. Pera del abdomen del largo del tórax, comprimida, *chagrinée;* en los bordes el *chagriné* se cambia en puntuación en líneas más o menos largas. Largo de las venas alares : subcostal, 900; marginal, 300; estigmal, 170; postmarginal, 380 micrones.

Cabeza triangular, los ángulos redondeados; entre los puntos umbilicados los espacios rugosos; desde el nivel de las antenas la cabeza es lisa hacia adelante con varias carenas. Las antenas son simples,

de 11 artículos, el anillo bastante grande, transverso (25 × 40 micrones), los artículos del funículo subiguales, subcuadrados, excepto el primero que es obcónico, más largo que ancho, con dos series de cerdas de un largo igual a la mitad de cada artículo. La maza es triarticulada, cónica, no más ancha que el funículo. los artículos soldados.

Parásito de *Neurolasioptera Baezi* Brèthes (ver más adelante este díptero).

Thorax opaque avec points ombiliqués, le pronotum transverse, un peu plus court que le mésonotum, celui-ci avec les lignes parapsidales bien marquées, l'écusson triangulaire, aussi long que le mésonotum. Le postécusson situé sous l'écusson et très étroit, le segment médiaire situé sur un plan inférieur, oblique. les mésopleures striées au-dessus d'une carène médiane oblique, fovéolées au-dessous de cette carène. Abdomen brièvement pétiolé, le pétiole un peu plus court que le fémur postérieur. Poire de l'abdomen de la longueur du thorax, comprimée, chagrinée; sur les bords le chagriné se change en ponctuation en lignes plus ou moins longues. Longueur des veines de l'aile: sous-costale, 900; marginale, 300; stigmale, 170; postmarginale, 380 microns.

Tête triangulaire, à angles arrondis avec points ombiliqués, les espaces rugueux; depuis le niveau des antennes, la tête est lisse en avant avec plusieurs carènes. Les antennes sont simples, de 11 articles, l'annelet assez grand, transverse (25 × 40 microns), les articles du funicule subégaux, subcarrés, excepté le premier qui est obconique, plus long que large, avec deux séries de soies, longues comme la moitié de chaque article. La massue est triarticulée, conique, pas plus épaisse que le funicule, les articles soudés.

Parasite de *Neurolasioptera Baezi* Brèthes (voir plus loin).

PSEUDOODERELLA Brèthes, n. gén.

Ab Ooderella *Ashm. simillima, sed femoribus anticis tantum haud proprie incrassatis et alis brevibus, ad apicem segmenti primi abdominis pene attingentibus. Capite globoso, oculis nudis, pedibus formicaeformibus, mesonoto impresso, in medio antice modice triangulariter tumidulo, tarsis mediis art. 1-3 utrinque subtus spinis in linea armatis, terebra vix haud exserta.*

Pseudooderella catamarcensis Brèthes, n. sp.

Obscure ferruginea, hic illic cupreo-nitente, capite, mesonoto antice in medio, coxis posticis et abdomine paulum obscurioribus, scapo et tarsis albido-testaceis, segmento 1° abdominis supra subtusque albido, alis brevissimis, dimidio basali hyalino, dimidio apicali fusco. Long. : $2^1/_2$-3 mm.

La cabeza y el tórax lisos, lucientes; su *chagriné* microscópico y poco apretado, con pelos blanquecinos, cortos; el escudete con el *chagrine* mucho más apretado y denso, las mesopleuras con el *chagriné* cambiado, casi en estriación longitudinal microscópica; el abdomen liso, luciente; su *chagriné* muy poco apretado, con algunos pelos esparcidos. Las alas no alcanzan la extremidad del primer segmento del abdomen, sin venas distintas, la mitad basal hialina, el resto obscurecido.

Parásito de una pupa de *Syrphidae* fijada en una espina de *Opuntia sulphurea* en Andalgalá (Catamarca), nacido el 25 de febrero de 1921; W. B. Alexander, leg.

La tête et le thorax luisants, leur chagriné microscopique et lâche, avec des poils blanchâtres courts; l'écusson avec le chagriné bien plus serré et dense, les mésopleures avec le chagriné devenant presque une striation longitudinale microscopique; l'abdomen luisant, son chagriné très lâche, avec des poils épars. Les ailes n'atteignent pas l'extrémité du premier segment de l'abdomen, ou à peine, sans veines distinctes, la moitié basale hyaline le reste rembruni.

Parasite d'un pupe de *Syrphidae* fixée sur une épine d' *Opuntia sulphurea* à Andalgalá (Catamarca), éclose le 25 février 1921; W. B. Alexander, leg.

Cerapterocerus bonariensis Brèthes, n. sp.

Testaceus, mesonoto paulum obscuriore et tantum metallice nitente, femoribus posticis apicem versus gradatim obscuris et tibiis posticis in medio late obscuris; alis partim hyalinis, partim fuscis : tertio basali, macula ante venam marginalem, litura pone stigmatem, apice et litura longitudinali sub vena marginali prope marginem posticum hyalinis. Long. : $1^1/_2$ mm.

Las antenas son comprimidas, con pelos negros, esparcidos; el escapo dos veces más largo que ancho; el pedicelo triangular, corto; los artículos del funículo muy transversos, progresivamente más angostos hasta el último, el primero truncado en el ángulo externo para recibir el pedicelo; los artículos siguientes más dilatados del lado externo y casi afilados al lado interno; la maza sólida, triarticulada, un poco más angosta y corta que el escapo. Escrobas elípticas, cortas. El pronoto con un *chagriné* transverso; el mesonoto con ese *chagriné* un poco más apretado y con pelos blanquecinos, esparcidos; el escudete con el *chagriné* más fuerte que el mesonoto y algunos pelos negros esparcidos. Segmento mediano, liso; los estigmas redondos. Abdomen liso, las cilias sensoriales situadas en el medio. Alas con la vena marginal dos veces más larga que la estigmal, la postmarginal nula.

Recogí algunos ejemplares parasitando *Ceroplastes Bergi* Ckll., en abril de 1917, en General Urquiza, Buenos Aires.

Les antennes sont comprimées, parsemées de poils courts et noirs; le scape est deux fois plus long que large; le pédicelle en triangle court, les articles du funicule très transverses, progressivement plus étroits jusqu'au dernier, le premier tronqué à l'angle externe pour recevoir le pédicelle, les articles suivants plus développés au côté externe et presque effilés à l'interne; la massue solide, triarticulée, un peu plus étroite et plus courte que le scape. Scrobes elliptiques, courts. Pronotum avec un chagriné transverse; le mésonotum avec le chagriné un peu plus serré et avec poils blanchâtres, épars, l'écusson avec le chagriné plus fort que le mésonotum et avec quelques soies noires éparses. Segment médiaire, lisse; les stigmates ronds. Abdomen lisse, les cils sensoriels situés au milieu. Ailes avec la veine marginale deux fois plus longue que la stigmale, la postmarginale nulle.

Je recueillis quelques exemplaires parasitant *Ceroplastes Bergi* Ckll., en avril 1917, à Général Urquiza, Buenos Aires.

Försterella bonariensis Brèthes, n. sp.

Nigra, nitida, alis hyalinis. Long. : 1,2 mm.

Cuerpo liso, alargado; las antenas de 10 artículos; el escapo cilíndrico, ligeramente angostado en las extremidades; el pedicelo obcónico, el primer artículo del funículo un poco mayor que el segundo, pero menor que el tercero; los demás artículos insensiblemente más

anchos hacia la extremidad. Largo de los artículos: 160, 60, 30, 15, 40, 50, 55, 55, 40 y 90 micrones. Dorso del tórax en un mismo plano, el postescudete y el segmento mediano declives. Abdomen alargado como el tórax. Cilias de las alas posteriores dos veces largas como el ancho del ala correspondiente, las de las alas anteriores un poco más cortas.

Cacé el ejemplar ♀ que describo, sobre un libro, en mi casa (General Urquiza), el 23 de febrero de 1921.

Corps lisse, allongé, les antennes de 10 articles : le scape cylindrique, légèrement attenué vers les bouts, le pédicelle obconique, le premier article du funicule un peu plus grand que le deuxième mais plus petit que le 3e, les autres articles insensiblement plus épais vert l'extrémité. Longueur des articles : 160, 60, 30, 15, 40, 50, 55, 55, 40 et 90 microns. Dos du thorax sur un même plan, le postécusson et le segment médiaire déclives. Abdomen allongé comme le thorax. Cils des ailes postérieures deux fois plus longs que la largeur de l'aile; ceux des ailes antérieures un peu plus courts.

Je recueillis l'exemplaire ♀ que je décris, sur un livre, chez moi (Général Urquiza), le 23 février 1921.

Mestocharis maculipennis Brèthes, n sp.

Nigra, polita, viridi-nitens, scapo basi et pedibus albis, sed femoribus in medio et tarsis apicem versus fuscioribus, alis hyalinis macula in limbo tantum infuscata. Long. : 1,5 mm.

La cabeza es un poco más ancha que el tórax; vista de delante es subtriangular, tan ancha como alta, pero pareciendo más ancha ; tiene una fuerte impresión facial con la base de las antenas en su parte inferior. El escapo es más largo que la mitad del resto de la antena; el pedicelo es obcónico ; los anillos son dos, el primero muy corto, el segundo bastante grande ; los tres artículos del funículo cilíndricos con algunos *sencilli ;* la maza triarticulada, apretada ; el último artículo estiliforme. El tórax es liso, *chagriné ;* las líneas parapsidales bien pronunciadas, y una impresión en el mesonoto delante del escudete. Éste es *chagriné,* sin líneas impresas. Pecíolo del abdomen un poco más largo que ancho, sus bordes paralelos; el resto del abdomen en losange, tan largo como ancho, deprimido, liso. Alas hialinas, con una mancha un poco obscurecida que ocupa el medio de las alas anteriores. Las venas miden : la subcostal, 300 ;

la marginal, 600; la estigmal, 70 y la postmarginal 120 micrones.
De la estación Mosconi (F. Sathicq, hijo, leg.) : XI-1920.

La tête est un peu plus large que le thorax; vue de devant elle est triangulaire, aussi large que haute, paraissant plus large; elle a une forte impression faciale avec la base des antennes a sa partie inférieure. Le scape est plus long que la moitié du reste de l'antenne; le pédicelle obconique, 2 annelets; le premier très court, le second assez grand, les 3 articles du funicule cylindriques, avec quelques *sencilli;* la massue triarticulée, serrée, le dernier article styliforme. Le thorax est lisse, chagriné, les lignes parapsidales bien prononcées, une impression avant l'écusson, celui-ci chagriné, sans lignes imprimées. Pétiole de l'abdomen un peu plus long que large, ses bords parallèles; le reste de l'abdomen en losange, aussi large que long, déprimé, lisse. Ailes hyalines, avec une tache un peu rembrunie qui occupe le milieu des ailes antérieures. Longueur des veines : subcostale, 300; marginale, 600; stigmale, 70; post-marginale, 120 microns.
De la station Mosconi (F. Sathicq, fils, leg.) XI-1920.

Fam. ICHNEUMONIDAE

Listrognathus Ronnai Brèthes, n. sp.

Nigro-flavo-variegatus. Capite flavo, macula pone oculos et ocellos includente cum postice nigris. Antennis nigris, articulis 10-16 albis. Pronoto flavo linea laterali nigra. Mesonoto nigro, maculis 4 flavis. Scutello nigro macula quadrata in medio et macula utrinque antice flavis. Postscutello nigro macula parva in medio et utrinque late flavis. Segmento mediario supra nigro, postice macula elongata nigra flavo-circundata. Mesopleuris dimidio superiore nigro, et puncto flavo notatis, dimidio inferiore flavo. Segmento 1° abdominis nigro apice flavo, segmento 2° basi nigro, dein gradatim ferrugineo et flavo, segmentis ceteris ferrugineis apicem versus flavis, pedibus flavis, vel plus minus aurantiacis, tarsis posticis albis sed metatarso postico dimidio basali et articulo 5° nigris, alis hyalinis, venis fuscis, stigmate flavo. Long. : 6 $^1/_2$ mm. Alae : 5 mm. Antennae : 7 mm. Terebra : vix 1 mm.

El clípeo es ligeramente transverso, separado de la cara por una impresión. La cara tiene dos pequeñas impresiones longitudinales

con una muy pequeña elevación cónica entre las antenas; éstas de 27 artículos cilíndricos, siendo blancos los 10 a 16. Ocelas en triángulo equilátero. Mesonoto liso: una línea mediana longitudinal groseramente puntuada hacia atrás y que no alcanza al escudete; éste con 3 ó 4 fovéolas impresas adelante. Segmento mediano con sus superficies superior y posterior bien separadas por una cresta aguda que se cambia en diente en los ángulos laterales; otra cresta anterior bien marcada, y estrías radiantes entre las dos crestas. Pleuras y esterno muy finamente *chagrinés;* la impresión mesosternal bastante marcada. Abdomen liso, muy finamente *chagriné,* los segmentos sin gastrocelas. Oviducto como del largo del 3er segmento. Alas hialinas, el estigma largo y angosto, la vena disco-cubital arqueada, la aréola subpentagonal, muy pequeña.

El doctor don Ernesto Ronna tiene preparado notas biológicas sobre ese himenóptero recogido en Pelotas, Río Grande do Sul.

Le clypéus est légèrement transverse et séparé de la face par une impression. La face a deux légères impressions longitudinales avec une très petite élévation conique entre les antennes; celles-ci de 27 articles cylindriques, les 10 à 16 blancs. Ocelles en triangle équilatéral. Mésonotum lisse : une ligne médiane longitudinale grossièrement ponctuée vers l'arrière et qui n'atteint pas l'écusson; celui-ci à l'avant avec 3 ou 4 fovéoles imprimées. Segment médiaire avec ses surfaces supérieure et postérieure bien séparées par une crête aiguë qui devient dentiforme aux angles latéraux; une autre crête antérieure bien marquée: entre les deux crêtes des stries rayonnantes. Pleures et sternum très finement chagrinés; l'impression mésosternale assez marquée. Abdomen lisse, très finement chagriné, les segments sans gastrocèles. Tarière à peu près de la longueur du 3e segment. Ailes hyalines, le stigma long et étroit, la veine disco-cubitale arquée. l'aréole subpentagonale, très petite.

Le docteur Ernesto Ronna a préparé des notes biologiques sur cet hyménoptère recueilli à Pelotas, Río Grande do Sul.

BALCARCIA Brèthes, n. gen.

Capite antice viso subsemicirculari, a superne viso vix ut oculos latere prominulo, facie leve prominula, clypeo apice arcuato, mesonoto lineis parapsidalibus notato, segmento mediario areolato, paulum pone inser-

tionem coxarum posticarum producto, abdomine petiolato, dimidio apicali compresso, petiolo recto, ad tertium apicalem paulum tumido, spiraculis pone medium sitis, inter se quam ab apice segmenti magis approximatis, terebra dimidio abdominis paulum longiore, alis stigmate normali, elongato, cellulis cubitali 1ª et discoidali 1ª connexis, areola minuta, quadrangulari; paulum vel vix petiolata, femoribus simplicibus, haud dentatis, tibiis mediis bicalcaratis, unguibus subtus e 6-7 dentibus armatis.

Esta descripción deja ver que este género pertenece a la tribu *Anomalini,* siendo muy vecino de *Eiphosoma* Cr. según las tablas de Ashmead, y de *Metanomalon* según las de Morley.

Balcarcia Bergi Brèthes, n. sp.

♀. *Nigra, mandibulis, palpis, scapo, tegulis, pedibus anticis, trochanteribus mediis posticisque, tibiis mediis maxima parte, genubus posticis et calcaribus flavis, alis subhyalinis, venis fuscis. Long. : 9 mm. Antennae : 6 mm. Alae : 6 mm. Terebra (parte exserta) : 3 mm.*

La cabeza y el tórax con una muy fina pubescencia blanquecina. La cabeza es opaca con una puntuación densa y fina. Una pequeña cresta transversa delante de las antenas. Ojos glabros. Tórax del ancho de la cabeza al nivel de la base de las alas, opaco, con puntuación fina y densa, con un pequeño espacio liso en las mesopleuras; el mesonoto con las dos líneas parapsidales bastante poco marcadas; el segmento mediano areolado: tres aréolas basales, la mediana no separada de la mediana posterior, las dos laterales con su borde posterior arqueado; detrás de éstas hay dos aréolas, la interna triangular y la externa en la que existe el estigma muy pequeño, oval, sobre la cresta antero-lateral. Abdomen peciolado, el primer segmento tan largo como el segundo, cilíndrico, un poco ensanchado en el tercio posterior, los estigmas situados en la base del ensanchamiento. Segundo segmento opaco, semicilíndrico, los estigmas situados un poco después del medio; los otros segmentos comprimidos, apenas más anchos que el segundo.

♂. El macho es semejante a la hembra, menos el oviducto.

Parásito de *Oeceticus Geyeri* Berg, obtenidos en Balcarce (prov. de Buenos Aires).

La tête et le thorax avec une très fine pubescence blanchâtre. La tête est opaque avec une très fine ponctuation dense. Une légère crête transverse devant les antennes. Yeux glabres. Thorax de la largeur de la tête au niveau de la base des ailes, opaque, densément pointillé, un petit espace lisse aux mésopleures, le mésonotum avec les deux lignes parapsidales assez peu marquées ; le segment médiaire aréolé : trois aréoles basales, la médiane non séparée de la médiane postérieure, les deux latérales à bord postérieur arqué : derrière celles-ci deux aréoles, l'interne triangulaire, l'externe avec le stigmate très petit, ovale, sur la crête antéro-latérale. Abdomen pétiolé, le premier segment aussi long que le second, cylindrique, un peu élargi au tiers postérieur, les stigmates situés à la base de l'élargissement. Deuxième segment opaque, semi-cylindrique, les stigmates situés un peu après le milieu; les autres segments comprimés, à peine plus larges que le second.

♂. Le mâle est complètement semblable à la femelle, moins la tarière.

Parasite d'*Oeceticus Geyeri* Berg, recueillis à Balcarce, au sud de la province de Buénos Ayres.

Fam. BRACORIDAE

Apanteles (Apanteles) duplicatus Brèthes, n. sp.

Niger, palpis, femoribus anticis dimidio apicali et mediis apice, tibiis anticis et 4 posticis basi, calcaribus, tarsis 4 anticis et posticis basi ferrugineo-testaceis, alis hyalinis, venis albido-testaceis, stigmate vix flavidulo, marginibus paulum fuscis. Long. : 2 mm.

Cara plana, bastante puntuada, con pelos blancos; un pequeño tubérculo mediano delante de las antenas; los ojos vellosos. Antenas de 18 artículos; el vértice liso, las ocelas en triángulo equilátero. Mesonoto liso, puntuado como la cara; una línea de fovéolas separándolo del escudete. Parte oblicua de éste lisa e impuntuada. Postescudete con una fovéola mediana y otras en su borde posterior. Segmento mediano poco puntuado, liso, sin carena mediana. Primer segmento del abdomen en trapecio, liso, más ancho en la base, más largo que ancho; el 2° segmento transverso, liso, una pequeña carena mediana basal ;

los otros segmentos lisos. Alas con la aréola incompleta, sus abscisas cubital y discoidal solas visibles. El oviducto es saliente, de 1/5 de milímetro.

Parásito de *Prodecatoma Parodii* Brèthes.

La face plane, assez ponctuée, avec poils blancs; un petit tubercule médian devant les antennes; les yeux villeux. Antennes de 18 articles; le vertex lisse, les ocelles en triangle équilatéral. Mésonotum lisse, ponctué comme la face; une ligne de fovéoles le séparant de l'écusson. Partie oblique de celui-ci lisse et imponctuée. Postécusson avec une fovéole médiane et d'autres au bord postérieur. Segment médiaire peu ponctué, lisse, sans carène médiane. Premier segment de l'abdomen en trapèze, lisse, plus large à la base, plus long que large; le 2e segment transverse, lisse, avec une petite carène médiane basale; les autres segments lisses. Ailes avec l'aréole incomplète, ses abscisses cubitale et discoïdale seules visibles. L'oviducte est exserte d'un cinquième de millimètre.

Parasite de *Prodecatoma Parodii* Brèthes.

Apanteles (Pseudapanteles) Alexanderi Brèthes, n. sp.

Niger, palpis et pedibus a coxis aurantiacis, tegula linea albida, alis hyalinis, venis albidis, sed marginibus stigmati, vena costali (radiali) et angulo areoli fuscis. Long. : 3 mm. Alae : 3 mm. Antennae : 3 mm. Terebra : 1 mm.

Cabeza, tórax y abdomen con finos pelos blanquecinos. Clípeo transverso, poco puntuado, anchamente truncado delante. Cabeza con puntuación bastante densa y un tuberculillo delante de las antenas; éstas de 18 artículos, el 3° un poco más largo que el siguiente. Mesonoto densamente puntuado como la cabeza, sin líneas parapsidales; una ligera cresta mediana en el cuarto posterior y un pequeño hundimiento de cada lado de esa cresta, separado del escudete por una línea de fovéolas. Escudete liso, impuntuado y sin pelos. El segmento mediano con una región mediana basilar más ancha en la base del abdomen. Esta región tiene una cresta mediana, longitudinal, con una vermiculación transversa y está limitada por una línea acompañada de una fila de puntos hundidos en su lado externo. Primer segmento del abdomen en cuadrado; sus bordes laterales paralelos; su superficie superior puntuada, los espacios teniendo una fina estriación longitu-

dinal. Segundo segmento cuatro veces más ancho que largo, subrectangular, con puntuación bastante distanciada. Segmentos siguientes lisos, con puntos esparcidos. Alas con la aréola abierta hacia la extremidad, con la primera transverso-cubital y la parte subyacente de la cubital bien marcadas.

Parásita un Lepidóptero que ataca las plantas de *Opuntia* sp., en Carmen de Patagones (prov. de Buenos Aires).

Tête, thorax et abdomen avec des poils fins blanchâtres. Clypéus transverse, peu ponctué, largement échancré en avant. Tête assez densément ponctué, avec un léger tubercule avant les antennes; celles-ci de 18 articles, le 3° un peu plus long que le suivant. Mésonotum densément ponctué comme la tête, sans lignes parapsidales, une légère crête médiane au quart postérieur et léger un enfoncement de chaque côté de cette crête, séparé de l'écusson par une ligne de fovéoles. Écusson lisse, sans points ni poils. Segments médiaire présentant une région médiane basilaire plus large à la base de l'abdomen. Cette région a une crête médiane longitudinale, une vermiculation transverse et est limitée par une ligne qui est accompagnée d'une file de points enfoncés à son côté externe. Premier segment de l'abdomen en carré, ses bords latéraux parallèles, sa surface supérieure avec ponctuation, les espaces avec une fine striation longitudinale. Deuxième segment quatre fois plus large que long, subrectangulaire, assez éparsément ponctué. Segments suivants lisses, avec poil épars. Ailes avec l'aréole ouverte vers l'extrémité, la 1e transverso-cubitale et la partie sous-jacente de la cubitale seules bien marquées.

Parasite un Lépidoptère qui attaque les plantes d'*Opuntia* sp., à Carmen de Patagones, au sud de la province de Buénos Ayres.

CATOLESTES Brèthes, n. gen.

Inter Rhyssalinarum, *prope* Colastem *collocatur. Capite marginato, postice haud inflato, forea inter clypeum et mandibulas, lineis parapsidalibus notatis, cellula radiali paulum ante medium stigmati orta, et vix ad apicem alae attingente, cellulis cubitalibus 3, 2ª radialem versus modice angustiore, venis transverso-cubitali 1ª obliqua, 2ª ad radium perpendiculari, vena recurrente interstitiali; abdomine sessili, ovato, segmentis 3 primis longitrorsum striatis, terebra plus minus longitudinem abdominis aequante, femoribus* (♂) *incrassatis.*

Catolestes argentinus Brèthes, n. sp.

Plus minus ferrugineus, ad piceum vergente in mandibulis, antennis, thorace plus minus extense, abdomine plus minusre, valvis terebrae et apice tarsorum; alis hyalinis, venis fuscis. Long.: 1 ¹/₂ - 2 mm. Terebra: 0,8 mm.

El clipeo está separado de la cara por una impresión semicircular; la cabeza y el tórax son opacos, *chagrinés;* las antenas de 17 artículos cilíndricos; las líneas parapsidales marcadas; el lobo mediano del mesonoto cambiándose en foveolado hacia atrás; una hilera transversa de unas 7 fovéolas separa el mesonoto del escudete. El segmento mediano es areolado-vermiculado; la cresta transversal posterior bastante distinta, de la cual sale una cresta casi lateral en la parte declive hacia la base del abdomen. Los segmentos abdominales 1, 2 y casi todo el tercero con estrías paralelas longitudinales, el resto del abdomen liso.

Parásito de *Prodecatoma Parodii* Brèthes.

Le clypéus est séparé de la face par une impression circulaire; la tête et le thorax sont opaques, chagrinés; les antennes de 17 articles cylindriques; les lignes parapsidales marquées; le lobe médian du mésonotum se changeant en fovéolé vers l'extrémité; une file transverse d'environ 7 fovéoles sépare le mésonotum du scutellum. Le segment médiaire est aréolé-vermiculé; la crête transverso-postérieure assez distincte et sortent d'elle une crête presque latérale sur la partie déclive jusque vers la base de l'abdomen. Les segments 1, 2 et presque tout le 3 avec des stries parallèles longitudinales, le reste de l'abdomen lisse.

Parasite de *Prodecatoma Parodii* Brèthes.

II. — DÍPTEROS

Fam. CECIDOMYIDAE

NEUROLASIOPTERA Brèthes, n. gén.

Palpi 4-articulati. Oculi in vertice confluentes. Antennae 19-articulatae, primo sequente duplo majore, articulis funiculi sensim paulatimque apicem versus angustioribus, appressis, sine collo, plus minus longitudine latitudine subaequalibus. Ungues simplices, tantulum empodio longioribus. Alae ut in Lasioptera.

Este género es vecino de *Meunieriella* Kieff. del cual se distingue sobre todo por la forma de los artículos de las antenas y las uñas simples; también vecino de *Lasioptera.*

Neurolasioptera Baezi Brèthes, n. sp.

Rojizo, la cabeza, el cuerpo, las patas, el radio y el cúbito con escamas aplicadas. Cabeza más larga que ancha, los ojos contiguos en el vértice. Las antenas de 19 artículos : el primero como dos veces más grueso que el siguiente ; los artículos del funículo adelgazando poco a poco hacia la extremidad, excepto el último que es un poco más grueso que el precedente y bastante cilíndrico; esos artículos son cuadrados, sin cuello, con dos anillos reunidos por un cordón longitudinal. Alas con el radio y el cúbito casi contiguos, no alcanzando éste el medio del borde costal. Últimos segmentos del abdomen en telescopio, cilíndricos, con muy finas verrugas en su lado dorsal. Uñas simples.



Fig. 2

La agalla (fig. 2) es plurilocular, más o menos cilíndrica o fusiforme, pudiendo alcanzar hasta 2 centímetros y aun más de largo, con su superficie cubierta de pelos blancos, erizados. Se produce sobre los tallos o los brotes terminales de *Teucrium inflatum ?*

El señor ingeniero J. R. Báez ha recogido esta interesante agalla en las islas cerca de la ciudad de Paraná, Entre Ríos.

Rougeâtre, la tête, le corps, les pattes, le radius et le cubitus avec écailles appliquées. Tête plus longue que large, les yeux contigus au vertex. Les antennes de 19 articles : le premier comme deux fois plus gros que le suivant ; les articles du funicule s'amincissant peu à peu vers l'extrémité, excepté le dernier qui est un peu plus gros que le précédent et assez cylindrique ; ils sont carrés, sans col, avec deux annelets réunis par un cordon longitudinal. Ailes avec le radius et le cubitus presque contigus, celui-ci n'atteignant pas la moitié du bord costal. Derniers segments de l'abdomen en télescope, cylindriques, avec de très fines verrues sur le bord dorsal. Ongles simples.

La galle (fig. 2) est pluriloculaire, plus ou moins cylindrique ou fusiforme, pouvant atteindre jusqu'à 2 centimètres et même plus de long, avec la surface couverte de poils blancs hérissés, et est produite sur les tiges ou les bourgeons terminaux de *Teucrium inflatum ?*

Monsieur l'ingénieur J. R. Báez à recueilli cette intéressante galle dans les îles des environs de Paraná, Entre Ríos.

Fam. STRATIOMYIDAE

Udamacantha bonariensis Brèthes, n. sp.

Nigra, polita, tantulum viridinitens, thorace crista laterali et abdomine latere anguste, halteribus et pedibus (femoribus tibiisque plus minus fuscis) albis, alis hyalinis, venis plurimus vix spuriis. Long 3 ½ mm.

Vista de arriba, la cabeza es subesférica, los ojos contiguos ; vista de lado, la cabeza presenta un pequeño hocico que pasa el nivel anterior de los ojos de un largo casi igual a la mitad de su diámetro. Las antenas pasan un tanto la extremidad del hocico. Se engruesan ligeramente hasta el tercer artículo, luego disminuyen en cono. Los artículos 3-5 son transversos ; el artículo 6-7 tan largo como ancho, en la base, en cono truncado ; el artículo 8° es pequeño, cuadrado ; el 9° angosto como el 8° pero dos veces y media más largo ; el 10°, transformado en cerda, largo como el 9°. Los ojos tienen facetas grandes y pequeñas ; éstas ocupan el ⅓ inferior. El tórax tiene una puntuación bastante esparcida en el medio y una fina estriación transversa hacia los lados. El escudete inerme es igualmente liso, con puntuación esparcida. El abdomen es subcuadrado, igualmente angostado adelante y atrás,

un tanto más ancho que el tórax, liso. Los halteres tienen el pedúnculo negro, la masa blanca.

De la estación Mosconi, provincia de Buenos Aires (F. Sathicq, hijo) : 12, XI, 1920.

Vue d'en haut, la tête est subsphérique, les yeux contigus; de côté elle présente un petit museau qui dépasse le niveau antérieur des yeux d'une longueur presque égale à la moitié de leur diamètre. Les antennes dépassent légèrement l'extrémité du museau. Elles grossissent légèrement jusqu'au 3e article, puis diminuent en cône. Les articles 3-5 sont transverses; l'article 6-7 aussi long que large à la base, et en cône tronqué, l'article 8e petit, carré; l'article 9e étroit comme le 8e, mais deux fois et demie plus long; le 10e en soie, long comme le 9e. Les yeux out des facettes grandes et petites, celles-ci occupant le $^{1}/_{3}$ inférieur. Le thorax a une ponctuation assez éparse au milieu et une striation fine transversale vers les côtés. L'écusson inerme est également lisse avec ponctuation éparse. L'abdomen est subcarré, également rétréci en avant et en arrière, un peu plus large que le thorax, lisse.

Les haltères ont le pédoncule noir, la massue blanche.

De la station Mosconi, province de Buénos Ayres (F. Sathicq, fils, leg.) 12, XI, 1920.

Vappo Alexanderi Brèthes, n. sp.

Niger, pilositate brevi albo-aureo-adspersa, tibiis plus minus obscure, tarsis antennisque ferrugineis, alis hyalinis, venis testaceis, vena subcostali fusca. Long. 2 $^{3}/_{4}$-4 mm.

Circunstancias completamente ajenas a mi voluntad no me permiten extenderme en la descripción de este díptero que ha sido cazado por el doctor W. B. Alexander en la República Argentina, sin que pueda precisar la localidad.

Fam. SYRPHIDAE

Chrysogaster argentina Brèthes, n. sp.

Viridis, hic illic cupreo-micans, tibiis et tarsis plus minus obscure testaceis, alis hyalinis, venis transversis et in cellulis discoidali, 1ª posteriore, 2ª posteriore maculis minute infumatis. Long. : 5 mm.

♂. Cara estriada transversalmente; una línea mediana más o menos lisa desde la base de las antenas hasta la boca. Antenas más o menos del largo de la cabeza; el 1er artículo corto, el 2° como dos veces más largo, el 3° un poco más largo que el 2°, cilíndrico y obtusamente agudo en la extremidad. Triángulo ocelar liso, luciente, verde. Ojos lampiños. Tórax verde, un poco luciente, con puntuación fina, las cuatro líneas longitudinales bronceadas, opacas. Escudete subcuadrangular, su borde posterior ligeramente convexo, con puntuación semejante a la del mesonoto, su superficie cobriza, el borde extremo verde. Abdomen verde, subluciente, uniformemente cubierto de pequeñas verrugas. Alas subhialinas, las venas transversales y pequeñas manchitas un poco ahumadas en la célula discoidal y en las 1ª y 2ª posteriores. Cuarta vena longitudinal ligeramente apendiculada y terminando frente a la extremidad de la 2ª longitudinal.

Un macho recogido en la sierra de la Ventana (prov. de Buenos Aires) por el doctor don W. B. Alexander, sobre *Opuntia bonaerensis,* el 9-I-1921.

Face striée transversalement; une ligne médiane à peu près lisse de la base des antennes à la bouche. Antennes à peu près de la longueur de la tête; le 1er article court, le 2e comme deux fois plus long, le 3e un peu plus long que le 2e, cylindrique et obtusément pointu à l'extrémité. Triangle ocellaire lisse, luisant, vert. Yeux glabres. Thorax vert, un peu luisant, pointillé, les 4 lignes longitudinales bronzées opaques. Écusson subquadrangulaire, son bord postérieur légèrement convexe, pointillé comme le mésonotum, le surface cuivrée, le bord extrême vert. Abdomen vert, subluisant, uniformément couvert de petites verrues. Ailes subhyalines, étant un peu enfu-

mées les veines transversales et de petites taches aux cellules discoïdale, 1e et 2e postérieures. Quatrième longitudinale légèrement appendiculée et terminant en face de l'extrémité de la 2e longitudinale.

Un mâle recueilli à la sierra de la Ventana (montagne de la Fenêtre), province de Buénos Ayres, par le docteur W. B. Alexander, sur *Opuntia bonaerensis,* le 9 janvier 1921.

Fam. ORTALIDAE

PSEUDOMELIERIA Brèthes, n. gen.

Articulo 3° antennarum supra haud exciso, elongato apice rotundato, 2° brevi, thorace supra macrochaetis postice notatis, vena prima longitudinali apice breve pilosa, vena 4ª longitudinali cum 3ª parallela; angulo postico cellulae analis acuto.

Esta corta diagnosis permite separar fácilmente este nuevo género de *Melieria* y géneros vecinos, particularmente por la estructura del tercer artículo antenar; los dibujos alares lo aproximan bastante a *Melieria* R. D. (= *Ceroxys* Mq., Lœw.).

Pseudomelieria argentina Brèthes, n. sp.

Capite rubro-ferrugineo, thorace griseo-puberulo, scutello piceo utrinque ferrugineo, abdomine nigro, polito, segmento primo ferrugineo, alis hyalinis, ad costam tantum flavescentibus, 7-maculatis. Long. : 7,5 mm.

La cabeza es colorada con una ligera pubescencia blanquecina al rededor de los ojos y pelos negros, finos, en la frente. Tórax con una pelucilla grisácea, una línea mediana y otra sublateral oliváceas; pleuras más marcadamente grises. Escudete liso, ferrugíneo, con una mancha negruzca en el medio. Abdomen negro y liso, con pelos muy finos negros, el primer segmento rojo. Patas de un marrón bastante obscuro, un poco más claras hacia las rodillas y los protarsos. Alas hialinas, el borde costal un poco amarillento con siete manchas par-

das distribuídas así: una muy pequeña después de la vena auxiliar, una en el estigma, una que abraza la extremidad del ala desde antes del fin de la 2ª vena longitudinal hasta la 4ª, una en la base de las venas longitudinales 2 y 3, una en la base de la célula discoidal y las venas transversales.

Un macho recogido en Andalgalá (Catamarca) sobre *Cereus Terscheckii* Parm., el 11 de febrero de 1921, por el doctor W. B. Alexander.

La tête est rouge avec une légère pubescence blanchâtre autour des yeux et de fins poils noirs au front. Thorax en dessus avec une pruinosité grisâtre, une ligne médiane et une sublatérale olivacées; pleures plus franchement grises. Écusson luisant, ferrugineux, avec une tache noirâtre au milieu. Abdomen noir luisant, avec poils noirs très fins, le premier segment rouge. Pattes marron assez obscur, un peu plus claires vers les genoux et les protarses. Ailes hyalines, le bord costal un peu jaunâtre, avec sept taches brunes comme suit: une très petite après la veine auxiliaire, une au stigma, une qui embrasse l'extrémité de l'aile depuis la fin de la 2ᵉ veine longitudinale jusqu'à la 4ᵉ; une à la base des veines longitudinales 2 et 3, une à la base de la cellule discoïdale et les veines transversales.

Un mâle recueilli à Andalgalá (Catamarca) sur *Cereus Terscheckii* Parm., le 21 février 1921, par le docteur W. B. Alexander.

Euxesta riojana Brèthes, n. sp.

Viridi-micans, capite, femoribus et protarsis ferrugineis, alis hyalinis, costa fusca. Long.: 4,5 mm.

Cabeza roja con algunas fuertes arrugas en la frente cerca de los ojos. Tercer artículo de las antenas subredondo, la cerda negra. La cara está excavada más en el sentido transversal, la cresta mediana casi nula, el clípeo un poco adelantado, negro. El tórax es verde, con una muy fina pruinosidad gris con hileras de pelos negros muy cortos, con macroquetas hacia atrás. Escudete con cuatro macroquetas. Abdomen verde como el tórax y su primer segmento con el tegumento bastante rojizo. Patas negruzcas, todos los fémures y protarsos de un rojo testáceo. Halteres con la maza amarillenta. Alas hialinas;

el borde costal negruzco hasta la 4ª longitudinal; esa faja un poco estrechada antes y después del estigma.

Un macho recogido por el doctor W. B. Alexander, en La Rioja, sobre *Cereus validus,* el 16 de febrero de 1921.

Tête rouge avec quelques fortes rides au front près des yeux. Troisième article des antennes subarrondi, le soie noire. La face est excavée plutôt transversalement, la crête médiane presque nulle, le clypéus un peu projeté, noir. Le thorax vert avec une très légère pruinosité grise, des files de poils noirs très courts et des macrochètes vers l'arrière. Écusson avec 4 macrochètes. Abdomen vert comme le thorax et son premier segment à tégument assez rougeâtre. Pattes noirâtres, tous les fémurs et protarses d'un rouge testacé. Haltères avec leur massue jaunâtre. Ailes hyalines; le bord costal noirâtre jusqu'à la 4e longitudinale; ce bord noirâtre un peu rétréci avant et après le stigma.

Un mâle recueilli par M. le docteur W. B. Alexander, à La Rioja, sur *Cereus validus,* le 16 février 1921.

Euxesta andina Brèthes, n. sp.

Cum precedente simillima, sed minor (± 3 mm.); etiam differt: clypeo et dimidio faciei inferiore nigris tantulum cyaneo-nitentibus, pedibus toto viridibus, basi abdominis concolore, margine costali nigro, inter stigmatem et apicem interrupto.

Un ejemplar cazado en Cacheuta (Mendoza), sobre *T. candicans,* el 17-III-1921, y otro en Andalgalá (Catamarca), sobre *Opuntia sulphurea,* el 11-II-1921, por el doctor W. B. Alexander.

Fam. LONCHAEIDAE

Lonchaea Alexanderi Brèthes, n. sp.

Nigro-chalybea, tarsis totis ferrugineis, articulis 2 vel 3 ultimis piceo-nigris, alis hyalinis, halteribus nigris. Long.: 2,5-3,5 mm.

Negra, con reflejos azulados; las antenas alcanzan la extremidad de la cara; los ojos son lampiños; la extremidad de la trompa testácea: las alas hialinas; las escamas alares blancas; los halteres negruzcos. Patas negras, negruzcas, los protarsos rojizos, los otros artículos volviéndose más o menos negros.

Varios ejemplares de Chilecito (La Rioja) recogidos al estado larval sobre *T. candicans* y sobre *O. ficus-indica,* y nacidas los 15-II-1921 y 16 y 18-III-1921; un ejemplar de Andalgalá, recogido sobre *C. Terscheckii* Parm., el 10-II-1921, por el doctor W. B. Alexander.

Noire, à reflets bleus; les antennes atteignent l'extrémité de la face; les yeux sont glabres; l'extrémité de la trompe testacée; les ailes hyalines; les écailles alaires blanches; les haltères noirâtres. Pattes noires ou noirâtres, les protarses rougeâtres, les autres articles devenant plus ou moins noirs.

Plusieurs exemplaires de Chilecito (La Rioja) recueillis à l'état de larves sur *T. candicans* et nés les 16 et 18-III-1921, et sur *O. ficus-indica,* le 15-II-1921; un exemplaire de Andalgalá recueilli sur *C. Terscheckii* Parm. le 10 février 1921 par le docteur W. B. Alexander.

Fam. SAPROMYZIDAE

Sapromyza quichuana Brèthes, n. sp.

Ocracea, opaca, alis limpidis costam versus tantulum flavidis. Long.: 4 mm.

Tercer artículo de las antenas un poco alargado, casi redondo, su cerda desnuda. Dos cerdas frontales. Palpos filiformes. Las cerdas dorsocentrales ausentes delante de la sutura y en número de 3 detrás de ella. Escudete con 4 cerdas. La distancia entre las venas transversales como una vez y media del largo de la transversa posterior. Los tarsos normales; dos cerdas anteapicales en las 4 tibias anteriores.

Un macho recogido en La Rioja sobre *C. validus* el 16-II-1921, por el doctor W. B. Alexander.

Troisième article des antennes un peu allongé, presque rond, sa soie nue. Deux soies frontales. Palpes filiformes. Les soies dorsocentrales nulles devant, et 3 après la suture. Écusson avec 4 soies. La distance entre les veines transverses comme une fois et demie de la longueur de la transverse postérieure. Les tarses normaux; deux soies antéapicales aux 4 tibias antérieures.

Un mâle recueilli à La Rioja sur *C. validus,* le 16-II-1921, par le docteur W. B. Alexander.

CONTRAVIENTOS HORIZONTALES EN COACCIÓN CON COLUMNAS

POR EL INGENIERO OTTOMAR SCHMIEDEL

La acción del viento sobre una construcción puede ser equilibrada estáticamente de diferentes modos y transmitida a los cimientos por medio de conductores estáticos, que el ingeniero preverá para el caso.

Por ejemplo, una pared de espesor reducido, formada de un material poco resistente a la flexión, sólo tendrá seguridad contra rotura y, por consiguiente, estabilidad siempre que ella sea de dimensiones muy pequeñas.

Para una pared de mayor extensión tendría que construirse un esqueleto, formado por montantes largueros y columnas de un material apto para resistir a momentos de flexión. Este esqueleto daría a la pared la resistencia necesaria. Las columnas, a su vez, podrían trabajar como empotradas en los fundamentos o como vigas, que se apoyaran contra otras construcciones adecuadas para transmitir las fuerzas a puntos de apoyo existentes, asegurándose así la estabilidad de la pared.

Tratándose de una construcción compuesta y más complicada, la investigación exacta, referente a la acción del viento en sus diferentes partes, se hace más dificultosa. Corresponde luego al ingeniero determinar aquellas partes constructivas dentro de una construcción íntegra, que principalmente delinean un esqueleto apto para la resistencia contra fuerzas horizontales, calcularlo y proyectarlo de acuerdo con la presión del viento y asegurar así la obra contra los efectos de éste.

Nos ocuparemos a continuación de una clase de construcciones, que el ingeniero debe aplicar con frecuencia como « contravientos »

para *halls* de exposición, mercados, talleres, galpones cerrados, etc., es decir, para edificios en que la necesidad de salas amplias y la falta de paredes transversales en número suficiente obligan a dedicar mayor atención e importancia a los medios constructivos aptos para contrarrestar los esfuerzos producidos por la presión horizontal del viento.

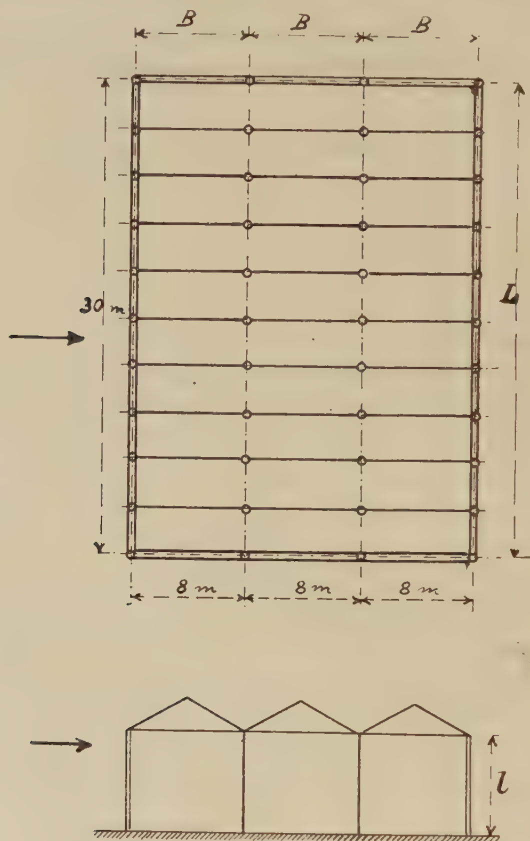


Fig. 1

Tomando, por ejemplo, una sencilla construcción, como la representada esquemáticamente por la figura 1, cuyas paredes exteriores de medio ladrillo de espesor no poseen mayor resistencia, mientras que todo el interior es un espacio único con dos hileras de columnas, el esqueleto de la construcción debe resistir a todas las fuerzas verticales y horizontales. En cuantó a los efectos horizontales del viento se ofrecen varios medios para contrarrestarlos. Uniendo las columnas correspondientemente con sus cimientos, ellas podrían asumir el carácter

de vigas empotradas, y para resistir al viento de la dirección indicada por la flecha, podrían cooperar una, dos o cuatro hileras de columnas,

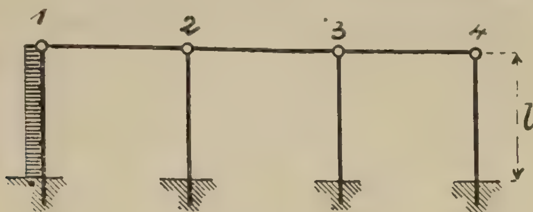
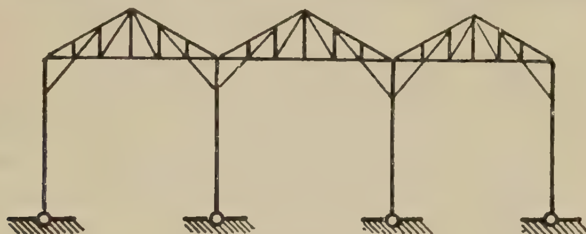


Fig. 2

según lo permitiera la existencia o la omisión de dispositivos de dilatación en la construcción de las cerchas.

En el ejemplo considerado, la omisión de dispositivos de dilatación sería perfectamente justificable y prescindiendo por el momento de


Fig. 3

los efectos del viento sobre el techo, por tratarse de establecer conceptos generales referente a los esqueletos de resistencia, tendríamos un sistema de cuatro hileras de columnas empotradas, con las cabezas acopladas por barras de unión. La primera hilera recibe la pre-


Fig. 4

sión directa del viento (fig. 2). Otro esqueleto de resistencia está esquemáticamente representado en la figura 3, cuyo sistema estático-elástico es comparable al representado en la figura 4. La figura 5 representa una variación del sistema de la figura 4, pues se ha previsto empotramiento de las columnas en sus cimientos.

Muy diferentes de los sistemas representados en las figuras 2, 4 y 5, son los de las figuras 6 y 6 *a* en que se emplean a la altura de los

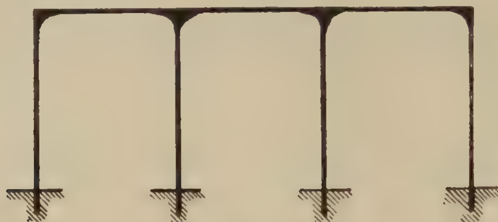


Fig. 5

apoyos de las cerchas, vigas horizontales de celosía, las cuales a su vez deben apoyarse contra sistemas verticales de resistencia.

Construyéndose los sistemas verticales de resistencia en las paredes, quedaría transmitida en el caso de la figura 6, toda la presión del viento a las ocho fundaciones *a, b, c, d, e, f, g* y *h*. Para las columnas interiores de las hileras *b-f* y *c-g* y para las correspondientes columnas de la hilera exterior *d-h* no se necesitaría tomar en consideración sino las cargas verticales, siempre mientras que obre el viento en la dirección indicada. Las columnas del lado del viento (hilera *a-e*) tendrían que resistir no sólo a las cargas verticales sino transmitir también parte de la presión del viento sobre la viga de celosía horizontal. En el sentido de las fuerzas horizontales tendría que considerarse, pues, a estas columnas, como vigas apoyadas en dos puntos. Uno de éstos estaría situado en el plano de la viga horizontal, el otro en el cimiento.

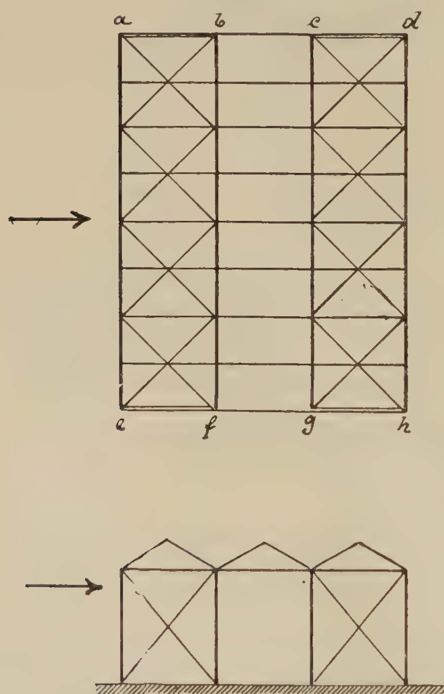


Fig. 6 y 6 *a*

En cuanto al apoyo en la viga horizontal, el sistema mismo le da las condiciones esenciales del apoyo libre y, por lo general, se

considera también de la misma categoría el apoyo en el cimiento.

En un caso dado serán para el ingeniero decisivas razones de economía referente a la aceptación de un sistema de acuerdo con las figuras 2 a 5 ó de un sistema según el principio de la figura 6 y, generalmente, entran en consideración como factores para el criterio, en primer lugar, la altura l de las columnas, y en segundo lugar, la longitud L y las dimensiones B de la construcción, pues con respecto

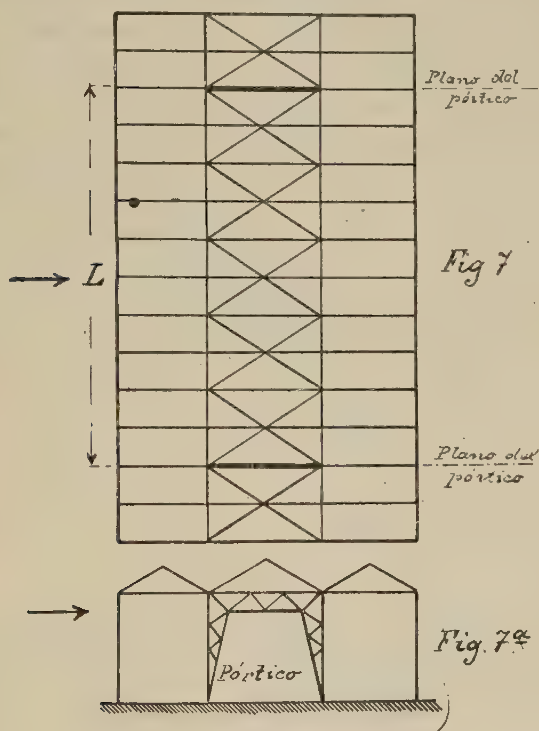


Fig. 7 y 7 *a*

a la longitud L hay eventualmente la posibilidad de la aplicación de vigas tipo «Gerber» o *cantilever* (fig. 7 y 7 *a*).

Hemos dicho que las columnas expuestas a la acción inmediata del viento obrarían como vigas sobre dos apoyos, de los cuales, desde luego, el superior podría ser considerado en las condiciones de apoyo libre. En cuanto a los apoyos en los cimientos, la clasificación justa resulta algo más difícil. La existencia de columnas acopladas (para grúas por ejemplo), puede obligar a dar a los cimientos un forma determinada la cual, desde luego, influye en la clasificación del apoyo,

por cuanto de la forma puede deducirse ya sobre la mayor o menor aptitud para resistir a momentos estáticos, es decir, sobre la posibilidad de tomar en consideración cierto grado de empotramiento. La calidad del terreno y la profundidad de la excavación son otros factores importantes para la clasificación del apoyo, pues si por una u otra razón fuera necesario fijar la base de los cimientos a cierta profundidad podrían resultar efectos de empotramiento por el empuje lateral y pasivo de la tierra, el cual, como se sabe, es mucho mayor que el empuje activo. La clasificación incondicional del apoyo en los cimientos como apoyo libre no es justificada, pues, por las razones expuestas, y en muchos casos tendrá que contarse con cierto grado de empotramiento. Incumbe, ahora, indudablemente, al ingeniero no

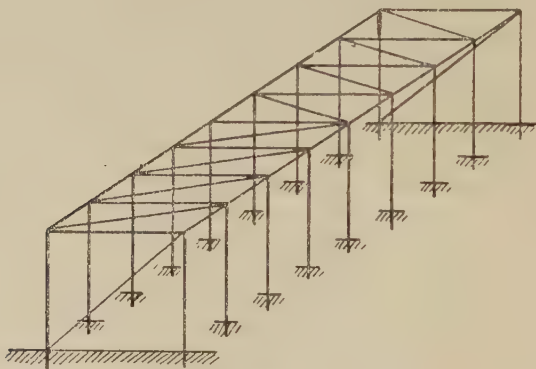


Fig. 8

sólo comprobar por los cálculos y medios adoptados el estado de la estabilidad, sino calcular la construcción con sus cimientos de acuerdo con el verdadero estado estático.

Una construcción, tratada en tal sentido, satisfará siempre más, tanto en el concepto estático y técnico, como también en el sentido de la economía, por cuanto el criterio sobre la economía únicamente debería basarse y aplicarse en construcciones, cuya ejecución corresponde en todas parte al estado estático existente.

Nos ocuparemos, por lo tanto, a continuación, del sistema que tiene una viga de celosía horizontal a la altura de los extremos superiores de las columnas, ofreciéndose así el ejemplo de una conexión de la viga con dos hileras de columnas empotradas en sus cimientos (fig. 8).

Suponiendo los apoyos de la viga de la celosía en los dos planos verticales de los extremos, de acuerdo con las condiciones que exis-

ten para vigas libremente apoyadas, el sistema estático tiene tantas incógnitas como el número de las columnas en conexión con la viga, es decir en el caso de la figura 8 tendríamos 18 incógnitas y la solución por medio de 18 ecuaciones sería indudablemente un procedimiento trabajoso y poco recomendable.

Es, por lo tanto, necesario buscar otra solución, que reuna la condición de la mayor sencillez del cálculo con la exactitud necesaria para los resultados.

Entremos en el desarrollo del procedimiento a seguir :

Para el caso de la figura 9, que representa una columna empotrada con cargas horizontales y con el momento de inercia T_1 resulta la flexión horizontal f en la altura l a

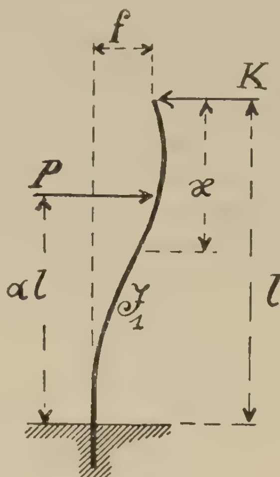


Fig. 9

$$f = \frac{1}{ET_1}\int_0^l (-K.x)\frac{\partial(-K.x)}{\partial K}dx + \frac{1}{ET_1}\int_{l(1-\alpha)}^{l} P\,[x - l(1-\alpha)]\frac{\partial(-K.x)}{\partial K}dx.$$

Siendo

$$\frac{\partial(-K.x)}{\partial K} = -x$$

resulta

$$ET_1 f = K\cdot\frac{l^3}{3} - P\left\{\frac{l^3}{3} - \frac{l^3}{3}(1-\alpha)^3 - l(1-\alpha)\left[\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{2}(1-\alpha)^2\right]\right\}$$

$$ET_1 f = \frac{l^3}{3}\left[K - P\left(\frac{3\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{2}\right)\right].$$

Poniéndose

$$K - P\left(\frac{3\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{2}\right) = Q$$

tendríamos

$$f = \frac{Q}{ET_1}\cdot\frac{l^3}{3}.$$

Vemos pues que la expresión $Q = K - P\left(\frac{3\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{3}\right)$ representa una fuerza imaginaria, la cual actuando sola con la recta de acción de K, produciría la misma flecha f que las fuerzas K y P actuando conjuntamente.

El sentido de la fuerza Q corresponde naturalmente al sentido de la deformación, es decir, en el caso de la figura 9 resultaría la suma algebraica $K - P\left(\frac{3\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{2}\right)$ como valor negativo.

Es evidente que el estado de deformación representado en la figura 9 puede ser interpretado también como resultado de la acción de las fuerzas P y $K_0 + Q$, en que K_0 significaría la fuerza horizontal aplicada a la altura l, para la cual sería $f = 0$.

Una columna empotrada, sometida a la fuerza horizontal P y apoyada en su extremo superior, situado a la altura l, en una construcción elástica, la cual experimenta una deformación f, en el punto de apoyo, ejerce sobre este apoyo una presión

$$K_0 + Q$$

en que Q tiene valor negativo y K_0 resulta de la condición

$$ET_1 f_0 = \frac{l^3}{3}\left[K_0 - P\left(\frac{3\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{2}\right)\right] = 0$$

$\therefore$

$$K_0 = P\left(\frac{3\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{2}\right).$$

La fuerza

$$Q = \frac{3ET_1}{l^3} \cdot f$$

es directamente proporcional al valor de la flecha f.

Es naturalmente lógico que sólo se hará la investigación estática, objeto del presente artículo, cuando la longitud L sea considerable en comparación al ancho B, es decir cuando las secciones de las barras en la construcción del contraviento alcancen valores algo considerables; pues sólo en este caso puede esperarse resultados de valor práctico por la aplicación del cálculo tratado. En tal caso, cuando la relación B : L se presenta como valor, que da al contraviento el aspecto marcado de una viga de celosía, podemos desde luego suponer que la línea de deformación de la viga se acercará mucho a la parábola, de modo que tenemos una base para la determinación suficientemente aproximada de las proporciones que rigen para las fuerzas Q en la altura l de las diferentes columnas.

Según la figura 10 se tiene :

$$y_x : y = x^2 : \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$y_x = y \cdot x^2 \cdot \frac{4}{L^2}$$

$$y = f$$

$$f_x = f - y_x = y\left(1 - \frac{x^2}{L^2} \cdot 4\right) = f\left(1 - \frac{x^2}{L^2} \cdot 4\right)$$

$$f_x = f \cdot \frac{L^2 - 4x^2}{L^2}.$$

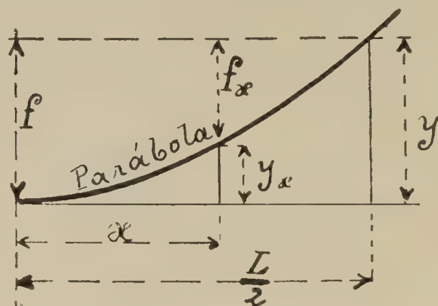


Fig. 10

La forma del reticulado del contraviento está determinada por la disposición de las columnas y en nuestro caso tenemos como tipo marcado la viga de cordones paralelos, uniformemente divididos en k trechos iguales, de modo que la distancia de dos nudos vecinos de un cordón es igual a $\frac{L}{k}$.

Para la distancia x en la figura 10 podemos por lo tanto poner

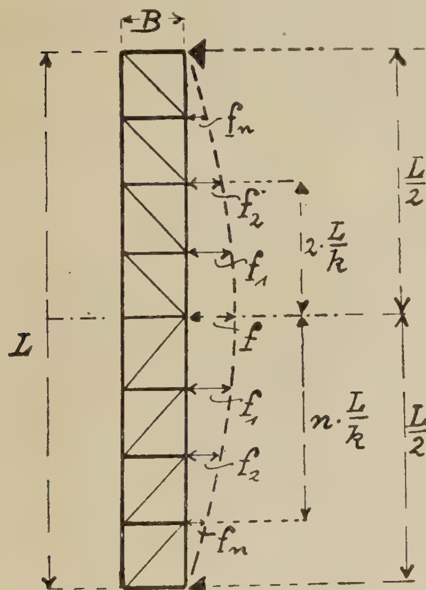


Fig. 11

$$x = n \cdot \frac{L}{k}$$

siendo n un número comprendido entre 1 y $\frac{k}{2}$, siempre que k sea un número par (fig. 11). Por consiguiente resultaría

$$f_n = f\left(\frac{L^2 - 4\,\frac{n^2 L^2}{k^2}}{L^2}\right) =$$

$$= f \cdot \frac{k^2 - 4n^2}{k^2}.$$

En caso de que k fuera un número impar, podríamos relacionar las flexiones f_n con la flexión f_1, que corresponde a la distancia $0{,}5 \cdot \frac{L}{k}$ del eje de la viga (fig. 12)

$$f_1 = f \cdot \frac{k^2 - 4 \cdot 0{,}5^2}{k^2} = f \cdot \frac{k^2 - 1}{k^2}$$

$$f_n = f \cdot \frac{k^2 - 4\,(n - 0{,}5)^2}{k^2}$$

$$f_n : f_1 = \frac{k^2 - 4\,(n - 0{,}5)^2}{k^2} : \frac{k^2 - 1}{k^2}$$

$$f_n = f_1 \cdot \frac{k^2 - 4\,(n - 0{,}5)^2}{k^2 - 1}.$$

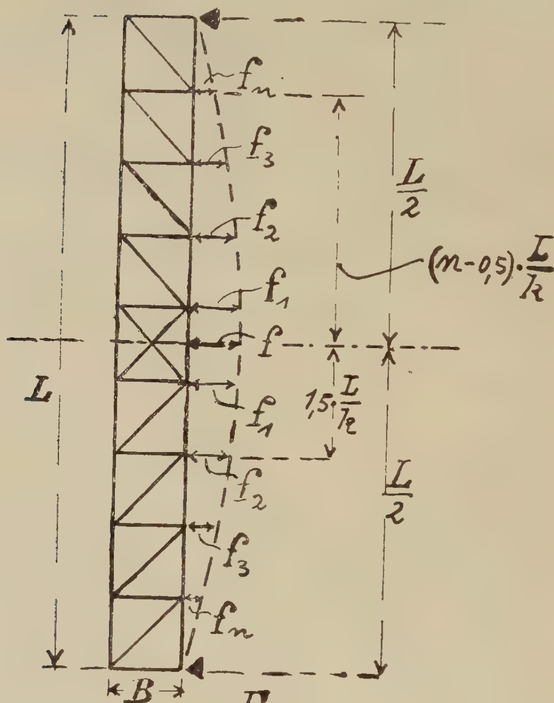


Fig. 12

Haciendo

$$\frac{k^2 - 4n^2}{k^2} = \eta_n \qquad \text{para } k \text{ par}$$

y

$$\frac{k^2 - 4\,(n - 0{,}5)^2}{k^2 - 1} = \eta_n^1 \qquad \text{para } k \text{ impar}$$

se obtiene

$$Q_n = Q \cdot \eta_n \qquad (k \text{ par})$$

y

$$Q_n = Q_1 \cdot \eta_n^1 \qquad (k \text{ impar}).$$

El número de las incógnitas se reduce por lo tanto a una sola para cada hilera de columnas, y si se prescinde de la pequeña diferencia con que se presentan las curvas de deformación de los dos cordones, aceptando para ellos igualdad de las deformaciones, el número de las incógnitas no es sino una sola para todo el sistema. Su determinación, según la teoría del trabajo virtual, no ofrecería dificultad alguna.

Preferimos, sin embargo, seguir un procedimiento, que es en el fondo el mismo, pero significa una simplificación.

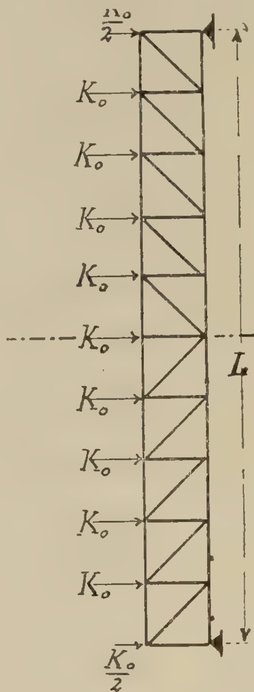


Fig. 13

El estado real de la carga de la viga de celosía se compone de los dos estados, cuyo uno está caracterizado por el valor K_0, que corresponde a $f = 0$ (fig. 13). El otro es dado por las cargas $Q \cdot \eta_n$ y $Q' \eta_n$, las cuales obran en sentido opuesto a K_0 (fig. 13 *a*, eventualmente 13 *b*).

Evidentemente se verifica la proporción

$$Q : Q' = T_1 : T'_1$$

significando T_1 y T'_1 los momentos de inercia de las correspondientes columnas

$$Q' = Q \cdot \frac{T'_1}{T_1} = Q \cdot c.$$

Si se eligiera para las dos hileras columnas del mismo momento de inercia resultaría $Q' = Q$.

Designemos ahora :

S_0, la tensión en t en cierta barra de la viga de celosía, producida por el estado de las cargas K_0 (fig. 13);

S_Q, la tensión en t en la misma barra, producida por el estado de las cargas Q (fig. 13 *a* o 13 *b*);

S, la verdadera tensión en la barra

$$S = S_0 + S_Q$$

S_η, la tensión de la barra, producida por el estado $Q = 1$ o $Q_1 = 1$ (fig. 14 *a* o 14 *b*), siendo

$$S_\eta \cdot Q = S_Q \qquad \text{(fig. 13 } a\text{)}$$

respectivamente

$$S_{\eta_1} \cdot Q_1 = S_Q \qquad \text{(fig. 13 } b\text{)}$$

S_1, la tensión resultante del estado de carga como la representa la figura 15 o figura 16;

s, la longitud de la barra en centímetros;

F, su sección en cm²;

E, el módulo de elasticidad en t/cm^2.

Resulta entonces que la contribución Δf de la barra en cuestión a la flexión f del punto a en dirección de la carga es:

$$\Delta f = \frac{S \cdot S_1 \cdot s}{EF} = \frac{(S_0 + S_Q) S_1}{EF} \cdot s = \frac{(S_0 + S_{\eta} \cdot Q_{(1)}) \cdot S_1}{E \cdot F} \cdot s$$

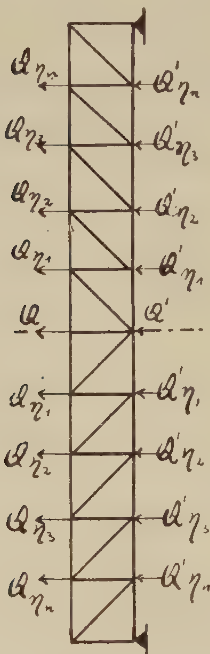


Fig. 13 a

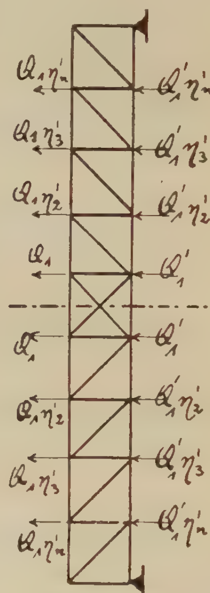


Fig. 13 b

$Q_{(1)}$ significa la carga de Q o Q_1 según se trata de un sistema con k par o impar (figs. 13 a o 13 b).

En la misma forma designaremos con $f_{(1)}$ la deformación f o f_1.

Por consiguiente la deformación total es:

$$f_{(1)} = \Sigma \frac{(S_0 + S_{\eta} \cdot Q_{(1)}) S_1}{EF} \cdot s$$

extendiéndose la suma a todas las barras del reticulado.

Por otra parte se tiene para la columna

$$f_{(1)} = \frac{Q_{(1)} l^3}{3ET_1}.$$

Luego es

$$\frac{Q_{(1)} l^3}{3ET_1} = \Sigma \frac{(S_0 + S_\eta \cdot Q_{(1)}) S_1}{EF} \cdot s = \Sigma \frac{S_0 S_1}{EF} \cdot s + Q_{(1)} \Sigma \frac{S_\eta \cdot S_1}{EF} \cdot s$$

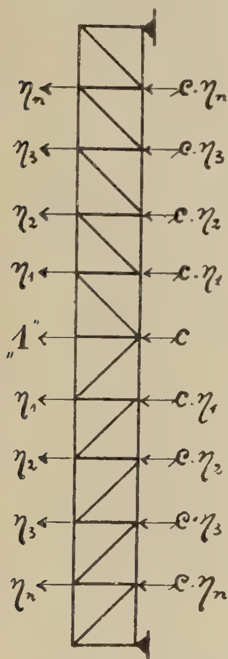


Fig. 14 *a*

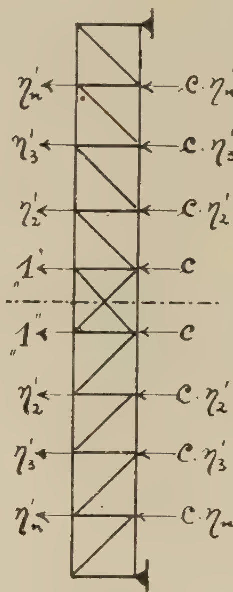


Fig. 14 *b*

$$Q_{(1)} \left(\frac{l^3}{3ET_1} - \Sigma \frac{S_\eta \cdot S_1}{E \cdot F} \cdot s \right) = \Sigma \frac{S_0 S_1}{EF} \cdot s$$

$$Q_{(1)} = \frac{3T_1 \Sigma S_0 S_1 \cdot \frac{s}{F}}{l^3 - 3T_1 \Sigma S_\eta S_1 \cdot \frac{s}{F}}$$

Actuando el viento como carga uniformemente repartida, tendría que ponerse $P = p \cdot d(\alpha l)$. Luego

$$O = \frac{l^3}{3} \left[K'_0 - pd(\alpha l) \left(\frac{3\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{2} \right) \right]$$

$$O = K'_0 \frac{l^3}{3} - pd(\alpha l) \left(\frac{3\alpha^2 l^2}{6} \cdot l - \frac{\alpha^3 l^3}{6} \right)$$

Para el segundo miembro debe hacerse la integración entre los límites O y l.

$$O = K_0 \frac{l^3}{3} - p \int_{\alpha = 0}^{\alpha l = l} \left(\frac{\alpha^2 l^2}{2} \cdot l - \frac{\alpha^3 l^3}{6} \right) d(\alpha l)$$

$$O = K_0 \cdot \frac{l^3}{3} - p \,.\, l \,.\, \left(\frac{l^3}{6} - \frac{l^3}{24} \right) = K_0 \frac{l^3}{3} - p \,.\, l \,.\, \frac{l^3}{8}$$

$$K_0 = \frac{3}{8} \cdot pl.$$

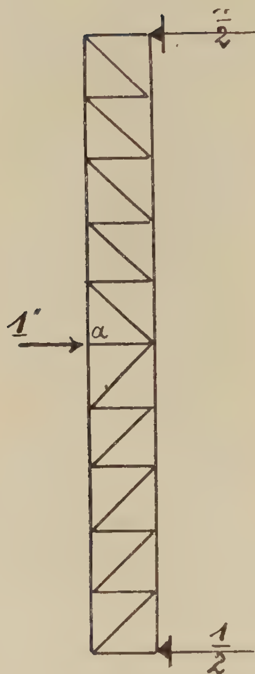


Fig. 15

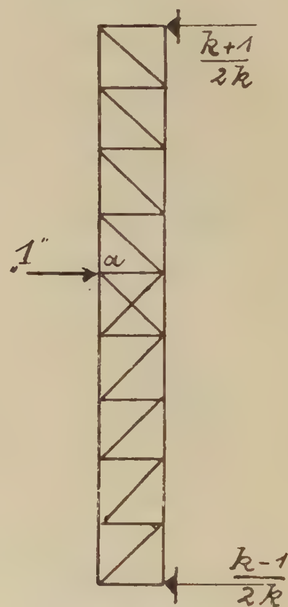


Fig. 16

En caso que se creyera necesario tomar en consideración, en los cálculos, la carga vertical a que está expuesta cada columna, tendría que determinarse la flexión $f_{(1)}$ a base del esquema de carga (fig. 17).

Para este caso es

$$ET \frac{d^2y}{dx^2} = -(Q \,.\, x + G \,.\, y)$$

$$\frac{ET}{G} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + y = -\frac{Q}{G} \cdot x.$$

La solución general de esta ecuación diferencial tiene la forma

$$y = -\frac{Q}{G} \cdot x + C . \sin\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot x + D . \cos\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot x$$

siendo para $x = 0$, $y = 0$, resulta en el presente caso $D = 0$.

Para $x = l$ es $\frac{dy}{dx} = 0$

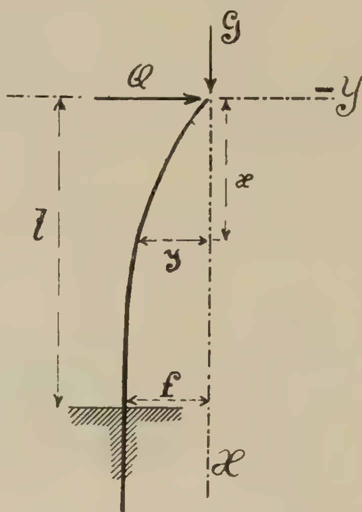


Fig. 17

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Q}{G} + C \cdot \sqrt{\frac{G}{ET}} \cos\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot x$$

$$O = -\frac{Q}{G} + C \cdot \sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot \cos\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot l$$

$$C = \frac{Q}{G\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot \cos\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot l}$$

Tenemos pues :

$$y = \frac{Q}{G}\left\{\frac{\sin\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot x}{\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot \cos\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot l} - x\right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{G}\left\{\frac{\cos\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot x}{\cos\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot l} - 1\right\}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = -\frac{Q}{G} \cdot \frac{\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot \sin\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot x}{\cos\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot l}$$

$$\frac{ET}{G} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + y = -\frac{Q}{G}\left\{\frac{\sin\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot x}{\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot \cos\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot l} - \frac{\sin\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot x}{\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot \cos\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot l} + x\right\}$$

$$\frac{ET}{G} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Q}{G} \cdot x$$

$$f = \frac{Q}{G \cdot \sqrt{\frac{G}{ET}}} \left\{ tg \sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot l - \sqrt{\frac{G}{EF}} \cdot l \right\}$$

Siendo iguales las cargas verticales G para todas las columnas de una misma hilera, resulta, como antes,

$$f : f_n = Q : Q_n$$

de modo que el procedimiento no se altera.

Se obtiene :

$$Q_{(1)} \left\{ \frac{1}{G \sqrt{\frac{G}{ET}}} \left(tg \sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot l - \sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot l \right) - \Sigma \frac{S_n S_1}{EF} \cdot s \right\} = \Sigma \frac{S_0 S_1}{EF} \cdot s$$

Con este resultado queda solucionado el problema planteado.

Para el desarrollo de la línea elástica, en el caso de la figura 17, hemos seguido el procedimiendo generalizado.

De interés puramente matemático es el desarrollo por intermedio del método de los coeficientes indeterminados, que agregamos a continuación.

Partiremos nuevamente de la ecuación

$$ET \frac{d^2y}{dx^2} = -(Q \cdot x + G \cdot y)$$

El valor negativo se explica por el hecho que la tangente disminuye con creciente valor x. Luego debe ser la segunda derivada

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$$

un valor negativo.

Haciendo

$$y = A_0 \cdot x^n + A_1 \cdot x^{n+1} + A_2 \cdot x^{n+2} + A_3 \cdot x^{n+3} + \\ + A_4 \cdot x^{n+4} + A_5 \cdot x^{n+5} + \ldots$$

se tiene

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot A_0 \cdot x^{n-1} + (n+1) A_1 \cdot x^n + (n+2) A_2 \cdot x^{n+1} + \\ + (n+3) A_3 \cdot x^{n+2} + (n+4) A_4 \cdot x^{n+3} + (n+5) \cdot x^{n+4} + \ldots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)\,A_0\,.\,x^{n-2} + (n+1)\,.\,n\,A_1\,.\,x^{n-1} +$$
$$+ (n+2)(n+1)\,A_2\,.\,x^n + (n+3)(n+2)\,A_3\,.\,x^{n+1} +$$
$$+ (n+4)(n+3)\,A_4\,.\,x^{n+2} + \dots$$

Luego tenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Q\,.\,x}{ET} + \frac{G\,.\,y}{ET} = 0 = n(n-1)\,A_0\,.\,x^{n-2} + (n+1)\,.\,nA_1\,.\,x^{n-1} +$$
$$+ (n+2)(n+1)\,.\,A_2\,.\,x^n + (n+3)(n+2)\,A_3\,.\,x^{n+1} +$$
$$(n+4)(n+3\,A_4\,.\,x^{n+2} + (n+5)(n+4)\,A_5\,.\,^{n+} + \dots +$$
$$+ \frac{Q\,.\,x}{ET} + \frac{G}{ET}\cdot A_0x^n + \frac{G}{ET}\cdot A_1x^{n+1} +$$
$$+ \frac{G}{ET}\cdot A^2\,.\,x^{n+2} + \cdot\frac{G}{ET}\cdot A_3\,.\,x^{n+3} + \frac{G}{ET}\cdot A_4\,.\,x^{n+4} + \dots$$

Esta ecuación sólo se verifica en el caso de que en el miembro derecho todos los coeficientes de las potencias de x sean iguales a cero.

Para este caso y para $n = 0$ obtenemos primero dos valores indeterminados por el momento : las constantes de integración.

Para $n = 0$ resulta :

$$0 = 0\,.\,A_0\,.\,x^{-2} + 0\,.\,A_1\,.\,x^{-1} + 1\,.\,2\,.\,A_2\,x^0 + 2\,.\,3\,.\,A_3\,.\,x^1 +$$
$$+ 3\,.\,4\,.\,A_4\,.\,x^2 + 4\,.\,5\,.\,A_5\,.\,x^3 + 5\,.\,6\,.\,A_6\,.\,x^4 + \dots +$$
$$+ \frac{Q\,.\,x^1}{ET} + \frac{G}{ET}\cdot A_0\,.\,x^0 + \frac{G}{ET}\cdot A_1\,.\,x^1 + \frac{G}{ET}\cdot A_2\,.\,x^2 +$$
$$+ \frac{G}{ET}\cdot A^3\,.\,x^3 + \frac{G}{ET}\cdot A_4\,.\,x^4 + \dots$$

Según lo expuesto debe ser

$$0\,.\,A_0 = 0\,; \qquad A_0 = \frac{0}{0} = \text{constante de una integración.}$$

$$0\,.\,A_1 = 0\,; \qquad A_1 = \frac{0}{0}\,\text{constante de una segunda integración.}$$

$$1\,.\,2\,.\,A_2 + \frac{G}{ET}\,.\,A_0 = 0\,; \qquad A_2 = -\,\frac{G}{ET}\cdot\frac{A_2}{1\,.\,2}$$

$$2.\,3\,.\,A_3 + \frac{G}{ET} + \frac{G}{ET}\cdot A_1 = 0\,; \qquad A = -\,\frac{G\,.\,A_1 + Q}{ET\,.\,2\,.\,3}$$

$$3 \,.\, 4 \,.\, A_4 + \frac{G}{ET} \cdot A_2 = 0\,;$$

$$A_4 = -\frac{G \,.\, A_2}{ET \,.\, 3 \,.\, 4} = +\left(\frac{G}{ET}\right)^2 \cdot \frac{A_0}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$$

$$4 \,.\, 5 \,.\, A_5 + \frac{G}{ET} \cdot A_3 = 0\,;$$

$$A_5 = -\frac{G \,.\, A_3}{ET \,.\, 4 \,.\, 5} = +\frac{G^2 \,.\, A_1 + G \,.\, Q}{(ET)^2 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$$

$$5 \,.\, 6 \,.\, A_6 + \frac{G}{ET} \cdot A_4 = 0\,;$$

$$A_6 = -\frac{G \,.\, A_4}{ET \,.\, 5 \,.\, 6} = -\left(\frac{G}{ET}\right)^3 \cdot \frac{A_0}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6}$$

$$6 \,.\, 7 \,.\, A_7 + \frac{G}{ET} \cdot A_5 = 0\,;$$

$$A_7 = -\frac{G \,.\, A_5}{ET \,.\, 6 \,.\, 7} = +\frac{G^3 \,.\, A_1 + G^2 \,.\, Q}{(ET)^3 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7}$$

$$7 \,.\, 8 \,.\, A_8 + \frac{G}{ET} \cdot A_5 = 0\,;$$

$$A_8 = -\frac{G \,.\, A_6}{ET \,.\, 7 \,.\, 8} = +\left(\frac{G}{ET}\right)^4 \cdot \frac{A_0}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8}$$

$$8 \,.\, 9 \,.\, A_9 + \frac{G}{ET} \cdot A_7 = 0\,;$$

$$A_9 = -\frac{G \,.\, A_7}{ET \,.\, 8 \,.\, 6} = +\frac{G^4 \,.\, A_1 + G^3 \,.\, Q}{(ET)^4 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 9}$$

etc.

Obtenemos por lo tanto

$$y = A_0 + A_1 \,.\, x - \frac{G \,.\, A_0}{ET2\,!} \cdot x^2 - \frac{G \,.\, A_1}{ET3\,!} \cdot x^3 - \frac{Q}{ET3\,!} \cdot x^3 +$$

$$+\left(\frac{G}{ET}\right)^2 \cdot \frac{A_0}{4\,!} x^4 + \left(\frac{G}{ET}\right)^2 \frac{A_1}{5\,!} \cdot x^5 + \frac{G \,.\, Q}{(ET)^2 \,.\, 5\,!} x^5 -$$

$$-\left(\frac{G}{ET}\right)^3 \cdot \frac{A_0}{6\,!} \cdot x^6 - \left(\frac{G}{ET}\right)^3 \cdot \frac{A_1}{7\,!} \cdot x^7 - \frac{G^2 Q}{(ET)^3\, 7\,!} \cdot x^7 +$$

$$+\left(\frac{G}{ET}\right)^4 \cdot \frac{A_0}{8\,!} \cdot x^8 + \left(\frac{G}{ET}\right)^4 \cdot \frac{A_1}{9\,!} \cdot x^9 + \frac{G^3 \,.\, Q}{(ET)^4 \,.\, 9\,!} \cdot x^9 - \left(\frac{G}{ET}\right)^5 \cdot \frac{A_0}{10\,!} \cdot x^{10} - \ldots$$

$$y = A_0 \left[1 - \frac{G}{ET} \cdot \frac{x^2}{2!} + \left(\frac{G}{ET}\right)^2 \cdot \frac{x^4}{4!} - \left(\frac{G}{ET}\right)^3 \cdot \frac{x^6}{6!} + \left(\frac{G}{ET}\right)^4 \cdot \frac{x^8}{8!} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{G}{ET}\right)^5 \cdot \frac{x^{10}}{10!} + \ldots \right] + A_1 \left[x - \frac{G}{ET} \cdot \frac{x^3}{3!} + \left(\frac{G}{ET}\right)^2 \cdot \frac{x^5}{5!} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{G}{EF}\right)^3 \cdot \frac{x^7}{7!} + \left(\frac{G}{ET}\right)^4 \cdot \frac{x^9}{9!} - \left(\frac{G}{ET}\right)^5 \cdot \frac{x^{11}}{11!} + \ldots \right] - \frac{Q}{G} \left[\frac{G}{ET} \cdot \frac{x^3}{3!} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{G}{ET}\right)^2 \cdot \frac{x^5}{5!} + \left(\frac{G}{ET}\right)^3 \frac{x^7}{7!} - \left(\frac{G}{ET}\right)^4 \cdot \frac{x^9}{9!} + \left(\frac{G}{ET}\right)^5 \cdot \frac{x^{11}}{11!} - \ldots \right]$$

Para $x = 0$ resulta según esta ecuación $y = A_0$ y siendo para $x = 0$ también $y = 0$ tenemos ahora

$$A_0 = 0$$

y por lo tanto

$$y = A_1 . x - \left(A_1 + \frac{Q}{G}\right) \left[\frac{G}{ET} \cdot \frac{x^3}{3!} - \left(\frac{G}{ET}\right)^2 \cdot \frac{x^5}{5!} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{G}{ET}\right)^3 \cdot \frac{x^7}{7!} - \left(\frac{G}{ET}\right)^4 \cdot \frac{x^9}{9!} + \left(\frac{G}{ET}\right)^5 \cdot \frac{x^{11}}{11!} - \ldots \right].$$

Debe determinarse todavía la constante A_1.

Siendo A_0 la constante que fué determinada para y, la constante A_1 corresponde lógicamente a la expresión

$$\int d \left(\frac{dy}{dx}\right).$$

La solución puede obtenerse por diferentes métodos. Seguimos el mismo camino de antes y ponemos

$$\frac{dy}{dx} = A_1 . x^n + A_2^1 x^{n+1} + A_3^1 . x^{n+2} + A_4^1 . x^{n+3} + \ldots$$

Luego es

$$y = \frac{A_1}{n+1} \cdot x^{n+1} + \frac{A_2^1}{n+2} \cdot x^{n+2} + \frac{A_3^1}{n+3} \cdot x^{n+3} + \frac{A_4^1}{n+4} \cdot x^{n+4} + \ldots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n . A_1 . x^{n-1} + (n+1) A_2^1 . x^n + (n+2) A_3^1 . x^{n+1} +$$

$$+ (n+3) . A_4^1 . x^{n+2} + (n+4) . A_5^1 . x^{n+3} + \ldots$$

Resulta pues

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Q \cdot x}{ET} + \frac{G \cdot y}{ET} = 0 = nA_1 \cdot x^{n-1} + (n+1) A_2^1 \cdot x^n +$$

$$+ (n+2) A_3^1 \cdot x^{n+1} + (n+3) A_4^1 \cdot x^{n+2} + (n+4) A_5^1 \cdot x^{n+3} + \ldots$$

$$+ \ldots \frac{Q \cdot x}{ET} + \frac{G \cdot A_1}{ET} \cdot \frac{n+1}{x^{n+1}} + \frac{G \cdot A_2^1}{ET} \cdot \frac{x^{n+2}}{n+2} +$$

$$+ \frac{GA_3^1}{ET} \cdot \frac{x^{n+3}}{n+3} + \frac{G \cdot A_4^1}{ET} \cdot \frac{x^{n+4}}{n+4} + \ldots$$

La constante de integración resulta en A_1 para $n = 0$. Para este caso tenemos

$$0 = 0 \cdot A_1 \cdot x^{-1} + A_2^1 \cdot x^0 + 2 \cdot A_3^1 \cdot x^1 + 3 \cdot A_4^1 \cdot x^2 +$$

$$+ 4 \cdot A_5^1 \cdot x^3 + \ldots + \frac{Q \cdot x}{ET} + \frac{G \cdot A_1}{ET} \cdot \frac{x^1}{1} + \frac{G \cdot A_2^1}{ET} \cdot \frac{x^2}{2} +$$

$$+ \frac{G \cdot A_3^1}{ET} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{G \cdot A_4^1}{ET} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{G \cdot A_5^1}{ET} \frac{x^5}{5} + \ldots$$

Como se comprende, deben ser, en esta ecuación, todos los coeficientes de las potencias de x iguales a cero.

Por consiguiente resulta :

$$0 \cdot A_1 = 0 ; \qquad A_1 = \frac{0}{0} = \text{constante de la integración } A_2^1 = 0 ;$$

$$2 \cdot A_3^1 + \frac{Q}{ET} + \frac{G \cdot A_1}{ET} = 0 ;$$

$$A_3^1 = - \frac{G \cdot A_1 + Q}{ET \cdot 2}$$

$$3 \cdot A_4^1 + \frac{G \cdot A_2^1}{ET \cdot 2} = 0 ;$$

$$A_4^1 = - \frac{G \cdot A_2^1}{ET \cdot 2 \cdot 3} = 0$$

$$4 \cdot A_5^1 + \frac{G \cdot A_3^1}{ET \cdot 3} = 0 ;$$

$$A_5^1 = - \frac{G \cdot A_3^1}{ET \cdot 3 \cdot 4} = + \frac{G^2 \cdot A_1 + G \cdot Q}{(ET)^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$5 \cdot A_6{}^1 + \frac{G \cdot A_4{}^1}{ET \cdot 4} = 0;$$

$$A_6{}^1 = -\frac{G \cdot A_4{}^1}{ET \cdot 4 \cdot 5} = 0$$

$$6 \cdot A_7{}^1 + \frac{G \cdot A_5{}^1}{ET \cdot 5} = 0;$$

$$A_7{}^1 = -\frac{G \cdot A_5{}^1}{ET \cdot 5 \cdot 6} = -\frac{G^3 \cdot A_1 + G^2 \cdot Q}{(ET)^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$7 \cdot A_8{}^1 + \frac{G \cdot A_6{}^1}{ET \cdot 6} = 0;$$

$$A_8{}^1 = -\frac{G \cdot A_6{}^1}{ET \cdot 6 \cdot 7} = 0$$

$$8 \cdot A_9{}^1 + \frac{G \cdot A_7{}^1}{ET \cdot 7} = 0;$$

$$A_9{}^1 = -\frac{G \cdot A_7{}^1}{ET \cdot 7 \cdot 8} = \frac{G^4 \cdot A_1 + G^3 \cdot Q}{(ET)^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}.$$

Con estas expresiones encontramos para el cuociente $\frac{dy}{dx}$ la forma:

$$\frac{dy}{dx} = A_1 - \frac{G \cdot A_1}{ET} \cdot \frac{x^2}{2!} - \frac{Q}{ET} \cdot \frac{x^2}{2!} + \left(\frac{G}{EF}\right)^2 \cdot A_1 \cdot \frac{x^4}{4!} +$$

$$+ \frac{G \cdot Q}{(ET)^2} \cdot \frac{x^4}{4!} - \left(\frac{G}{ET}\right)^3 \cdot A_1 \cdot \frac{x^6}{6!} - \frac{G^2 \cdot Q}{(ET)^3} \cdot \frac{x^6}{6!} + \left(\frac{G}{ET}\right)^4 \cdot A_1 \cdot \frac{x^8}{8!} +$$

$$+ \frac{G^3 \cdot Q}{(ET)^4} \cdot \frac{x^8}{8!} - \left(\frac{G}{ET}\right)^5 \cdot A_1 \cdot \frac{x^{10}}{10!} - \frac{G^4 Q}{(ET)^5} \cdot \frac{x^{16}}{10!} + \left(\frac{G}{ET}\right)^6 \cdot A_1 \cdot \frac{x^{12}}{12!} + \ldots$$

$$\frac{dy}{dx} = A_1 - A_1 \left[\frac{G}{ET} \cdot \frac{x^2}{2!} - \left(\frac{G}{ET}\right)^2 \cdot \frac{x^4}{4!} + \left(\frac{G}{ET}\right)^3 \cdot \frac{x^6}{6!} - \left(\frac{G}{ET}\right)^4 \cdot \frac{x^8}{8!} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{Q}{G}\left[\frac{G}{ET} \cdot \frac{x^2}{2!} - \left(\frac{G}{ET}\right)^2 \cdot \frac{x^4}{4!} + \left(\frac{G}{ET}\right)^3 \cdot \frac{x^6}{6!} - \left(\frac{G}{ET}\right)^4 \frac{x^8}{8!} + \ldots\right].$$

Para $x = l$ resulta $\frac{dy}{dx} = 0$, de modo que tiene que ser

$$A_1 = \frac{Q\left[\frac{G}{ET} \cdot \frac{l^2}{2!} - \left(\frac{G}{EF}\right)^2 \cdot \frac{l^4}{4!} + \left(\frac{G}{ET}\right)^3 \cdot \frac{l^6}{6!} - \left(\frac{G}{ET}\right)^4 \cdot \frac{l^8}{8!} + \ldots\right]}{G\left[1 - \frac{G}{ET}\frac{l^2}{2!} + \left(\frac{G}{ET}\right)^2 \cdot \frac{l^4}{4!} - \left(\frac{G}{ET}\right)^3 \cdot \frac{l^6}{6!} + \left(\frac{G}{ET}\right)^4 \cdot \frac{l^8}{8!} - \ldots\right]}.$$

Siendo

$$1-\frac{G}{ET}\cdot\frac{l^2}{2\,!}+\left(\frac{G}{ET}\right)^2\cdot\frac{l^4}{4\,!}-\left(\frac{G}{ET}\right)^3\cdot\frac{l^6}{6\,!}+$$

$$+\left(\frac{G}{ET}\right)^4\cdot\frac{l^8}{8\,!}-\ldots=\cos\sqrt{\frac{G}{ET}}\cdot l$$

resulta

$$\frac{G}{ET}\cdot\frac{l^2}{2\,!}-\left(\frac{G}{EF}\right)^2\cdot\frac{l^4}{4\,!}+\left(\frac{G}{ET}\right)^3\cdot\frac{l^6}{6\,!}-$$

$$-\left(\frac{G}{ET}\right)^4\frac{l^8}{8\,!}+\ldots=1-\cos\sqrt{\frac{G}{ET}}\cdot l.$$

De modo que es

$$A_1=\frac{Q}{G}\cdot\frac{1-\cos\sqrt{\frac{G}{ET}}\cdot l}{\cos\sqrt{\frac{G}{ET}}\cdot l}$$

$$y=\frac{Q}{G}\cdot\frac{1-\cos\sqrt{\frac{G}{ET}}\cdot l}{\cos\sqrt{\frac{G}{ET}}\cdot l}\cdot x-\frac{Q}{G}\left(\frac{1-\cos\sqrt{\frac{G}{ET}}\cdot l}{\cos\sqrt{\frac{G}{ET}}\cdot l}+1\right)\cdot\left[\frac{G}{ET}\cdot\frac{x^3}{3\,!}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{G}{ET}\right)^2\cdot\frac{x^5}{5\,!}+\left(\frac{G}{ET}\right)^3\cdot\frac{x^7}{7\,!}-\left(\frac{G}{ET}\right)^4\cdot\frac{x^9}{9\,!}+\ldots\right]$$

$$\frac{G}{ET}\cdot\frac{x^3}{3\,!}-\left(\frac{G}{ET}\right)^2\cdot\frac{x^5}{5\,!}+\left(\frac{G}{ET}\right)^3\cdot\frac{x^7}{7\,!}-\left(\frac{G}{ET}\right)^4\cdot\frac{x^9}{9\,!}+\ldots=$$

$$=\sqrt{\frac{ET}{G}}\left[-\left(\frac{G}{ET}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x+\left(\frac{G}{ET}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{x^3}{3\,!}-\left(\frac{G}{ET}\right)^{\frac{5}{2}}\cdot\frac{x^5}{5\,!}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{G}{ET}\right)^{\frac{7}{2}}\cdot\frac{x^7}{7\,!}-\ldots+\left(\frac{G}{ET}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x\right]=\frac{-\sin\sqrt{\frac{G}{ET}}\cdot x+\sqrt{\frac{G}{ET}}\cdot x}{\sqrt{\frac{G}{ET}}}$$

$$y=\frac{Q}{G}\,\frac{\sqrt{\frac{G}{ET}}\left(1-\cos\sqrt{\frac{G}{ET}}\cdot l\right)\cdot x+\sin\sqrt{\frac{G}{ET}}\cdot x-\sqrt{\frac{G}{ET}}\cdot x}{\sqrt{\frac{G}{ET}}\cdot\cos\sqrt{\frac{G}{ET}}\cdot l}$$

$$y = \frac{Q}{G} \cdot \left\{ \frac{\sin \sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot x}{\sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot \cos \sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot l} - x \right\}$$

El resultado es idéntico con el anterior.

Resultaría, pues

$$Q_{(1)} = \frac{G \cdot \Sigma \frac{S_0 S_1}{EF} \cdot s}{\sqrt{\frac{ET}{G}} \left(\operatorname{tg} \sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot l - \sqrt{\frac{G}{ET}} \cdot l \right) - G \Sigma \frac{S_{r_1} \cdot S_1}{EF} \cdot s}$$

JUAN J. J. KYLE

(1838-1922

— — —

Demain la terre répondra à ceux qui t'apelleront : « Il est mort ! Jamais mon sein jaloux ne rend ceux qu'il enferme pour l'eternité ! » (Leyenda de Oriente.)

La Sociedad Científica Argentina ha querido honrar la memoria del profesor doctor Juan J. J. Kyle y me ha confiado a mí, su discípulo agradecido y reverente, la misión de trazar una semblanza del hombre, un juicio del maestro y un elogio del investigador de laboratorio, interrumpiendo con este homenaje póstumo, en las páginas de sus *Anales,* la corriente de los estudios que reflejan la actividad de nuestro ambiente, como interrumpen la monotonía de los caminos europeos esos altares rústicos levantados por la devoción — que es una forma de amor — para recordar a unos la deuda contraída con los que fueron, y consolar a otros de las vicisitudes y penurias de la jornada.

Ninguna dificultad entraña la tarea sino es la que nace del temor de resultar insuficiente en la forma y parco en el elogio, que nunca como aquí puede con justicia estricta prodigarse; pero una y otra dificultad quedan salvadas si se recuerda que la sencillez y la sinceridad de espíritu del maestro imponen que de él se hable

simplement, comme on verse un parfum sur une flamme (1)

como él mismo viviera, serena, mansamente, en el trabajo y en el estudio, extraño a la ambición y a la vanidad engañosas, hablando poco y realizando mucho, dando el ejemplo... Hay jardineros que cui-

(1) Paul Verlaine, *Un conte,* París, 1897.

dan en el silencio fecundo de sus invernáculos, donde se respira ese olor complexo del humus, una especie preciosa, una raza que florece con exquisito perfume, con dibujos complicados o con armonioso color, sin afán de lucro, en culto puro de belleza; así el maestro desaparecido ha modelado, a través de los años, un tipo de hombre a imitar, el del forjador anónimo de la grandeza nacional, ignorado muchas veces, incomprendido siempre, pero indispensable en el organismo gigantesco, como esos *hormones* obscuros de la moderna biología que, catalizadores o estímulos, orientan y encauzan, aceleran y refuerzan, intensifican y agitan; directores sin los cuales el torbellino maravilloso de la materia viva sólo sería acumulación informe de átomos heterogéneos.

Y mi afán es mostrar todo el oro de su alma para los que no lo conocieron, para los que han de sucedernos en la misma tarea, en el mismo surco, cuando nosotros mismos hayamos desaparecido y no tengamos voz para elogiarlo y, sombras sin cuerpo, no podamos siquiera hacer revivir su recuerdo con la imitación de sus virtudes y de sus méritos.

A través de la vida vamos creando sentimientos que nos sobreviven, que perduran más allá de la muerte y que, atesorados por los jóvenes, aseguran el fruto de nuestra labor educadora: el viejo maestro puede dormir tranquilo su eterno sueño, porque entre los hombres de estudio, entre los químicos de nuestra generación, no escasean los que merecen llamarse sus discípulos, y no es de temer en ellos el olvido que engendra la ingratitud y que sólo puede explicarse por la ambición o por la ignorancia. No se me oculta que el olvido es una defensa contra el dolor: si persistiesen en el alma las heridas que recibimos, la vida se haría imposible; pero el olvido a que aludo no es el de nuestras penas, sino el de los méritos de aquellos que nos formaron y a los cuales debemos nuestros triunfos. Siendo niños olvidamos sin esfuerzo: hombres, muchas veces luchamos en vano por olvidar...

Juan José Jolly Kyle nació a orillas del Forth, en Stirling, pequeña ciudad de Escocia, el 2 de febrero de 1838, y en ella realizó sus estudios primarios, cursando en Edimburgo los secundarios y universitarios que completó mucho después en la Facultad de ciencias médicas de Buenos Aires.

Se inició en la vida del laboratorio en 1851, actuando como aprendiz primero y practicante más tarde, en una farmacia de la capital de Escocia, hasta el año de 1855.

Fué luego ayudante del profesor de química de la Escuela de medicina, en la Universidad de Edimburgo, ascendiendo muy pronto, por sus merecimientos, al cargo de jefe del laboratorio químico de la Universidad de Glasgow.

Sus estudios e investigaciones en estos laboratorios le orientaron hacia el campo de la industria, ejerciendo las funciones de químico en una fábrica de negro animal, en Greenock (Escocia), que abandonó para servir de asesor técnico a un fuerte comerciante vinculado al negocio de saladeros, industria cuyos problemas poseen una relación tan estrecha con la ciencia que el joven químico cultivaba. A esta circunstancia debemos la venida del doctor Kyle a nuestro país, pues tras una estada en la República del Uruguay desempeñando la misión que se le había confiado, se trasladó a Buenos Aires, desembarcando en nuestro suelo el 9 de julio de 1862.

Hallábase entregado a diversos trabajos de química aplicada, ante los problemas que un país nuevo tan rico en recursos naturales como pobre en medios de explotarlos ofrecía a su espíritu de investigación, cuando se produjo la declaración de guerra del mariscal Solano López a la República Argentina (5 de marzo de 1865), alistándose entonces en el ejército nacional como farmacéutico. Partió de Buenos Aires el 10 de junio del mismo año y, acompañando a las tropas en sus marchas a través de Entre Ríos y Corrientes, llegó hasta el Paraguay, tomando parte en las cruentas jornadas de Tuyutí, el Boquerón y toma de Uruguayana.

Las delicadas tareas del joven farmacéutico se complicaron con la aparición del cólera en ambos campos de combatientes, sirviendo a bordo del vapor *Pavón,* dedicado al transporte de heridos, y luego en el hospital de Itapirú, del cual salió el 8 de diciembre de 1866, a cargo de un convoy de heridos e inválidos que regresaban a Buenos Aires.

Solicitó y obtuvo su baja al llegar a la capital, para reanudar sus estudios universitarios y rendir los exámenes de la licenciatura en farmacia en la Facultad de ciencias médicas, graduándose en 1872 y ejerciendo hasta ese año la profesión, en sociedad con don Melitón Espinosa — farmacéutico de gran prestigio y médico notable después, — en la *antigua botica de Marenco,* situada en la esquina de las calles Florida y Tucumán.

El primer trabajo científico publicado por el doctor Kyle data de 1871 y figura en las páginas de la *Revista farmacéutica* del mismo año, correspondiendo a esa época su vinculación a la enseñanza en el

Colegio nacional de Buenos Aires que no debía abandonar hasta su jubilación: tenía entonces 33 años y contaba con un capital respetable de ciencia y experiencia acumuladas en circunstancias excepcionales, las más favorables para forjar un carácter y orientar una inteligencia. Y penetrado de sus deberes y de sus derechos en la tierra que lo había acogido como madre y a la cual se había entregado en los días trágicos de la guerra y de la peste; convencido de que donde uno es amado, allí tiene su patria (1); presintiendo que el concepto de *depósito de civilización* que en Europa se tiene de patria, se transformaba en la joven América en *taller de civilización,* naturalizóse argentino en 1873 dentro de los términos de la ley, aunque argentino era ya sincera, hondamente, por su actuación en las horas de bonanza y de tormenta, en la paz y en la guerra.

Para apreciar en su justo valor la obra científica del doctor Kyle, para comprender la elección que hiciera de rumbos para su actividad multiforme e incesante, es indispensable echar una mirada sobre el ambiente nacional en esa época, original por más de un concepto.

La producción del hombre de ciencia, como toda actividad del espíritu, hállase rigurosamente condicionada por el medio físico y moral. Con razón se ha dicho que el sabio es planta delicada, susceptible de prosperar solamente en un terreno especial formado por el aluvión de secular cultura y labrado por la solicitud y estimación sociales. En ambiente favorable hasta el apocado siente crecer sus fuerzas; un medio hostil o indiferente abate el ánimo mejor templado (2). La opinión del eminente profesor español justifica mi aparente digresión, estudiando la obra del doctor Kyle, realizada en pleno movimiento de nacional resurgimiento.

A partir de 1852, en efecto, el tiempo pareció escaso a los hombres de pensamiento y de acción para ganar tanto año perdido, durante la tiranía. Las iniciativas se multiplican, la universidad despierta de un letargo que amenazaba ser mortal, y la química renace bajo el polvo amontonado sobre el laboratorio de Manuel Moreno, olvidado en los claustros de Santo Domingo, para comenzar una marcha ascendente ininterrumpida con el impulso que le prestaran un joven español, el doctor Miguel Puiggari, y otro italiano, el doctor Domingo Parodi, principalmente, sin que deba olvidarse la participación del doctor

(1) EMILE FAGUET, *Los diez mandamientos : la Patria,* París, 1913.

(2) S. RAMÓN Y CAJAL, *Reglas y consejos sobre investigación biológica,* página 137, Madrid, 1913.

Nicanor Albarellos, desde 1854, en la cátedra de física y química médica, del doctor Tomás Péron, desde 1863, en la química de estudios secundarios, y del señor Eduardo Olivera, iniciador de la química agrícola en el país.

Las industrias químicas comenzaban a atraer la atención del capital extranjero, y los trabajos de química aplicada que se publican en esa época demuestran bien esta preocupación creciente. La industria vinícola, la de las carnes y de los cueros, la azucarera, la de la yerba mate, la de los aceites y de productos de lechería, son objeto de estudios numerosos, folletos, monografías, artículos, solicitudes de patentes y privilegios que comprueban ese general afán de reabrir tanta fuente cegada de riqueza, y de descubrir otras nuevas, en la minería, por ejemplo, beneficiando criaderos de metales nobles, yacimientos de combustibles sólidos o manantiales petrolíferos más tarde.

Favoreciendo ese movimiento se produce, en 1861, el nombramiento del doctor José María Gutiérrez como rector de la Universidad de Buenos Aires. Desde ese año hasta 1873, este argentino ilustre, en quien parecían reverdecer los entusiasmos de los jóvenes de la revolución, no descansó un instante para llevar la institución a gran altura, ejerciendo su acción hasta fuera de ella, auspiciando el estudio de las ciencias naturales y colaborando en todas las obras de su tiempo en pro del adelanto general del país. A él se debe la realización del proyecto de 1858, preparado por Pellegrini, Senillosa y Duteil, para crear un departamento de ciencias exactas, físicas y naturales; y gracias a sus gestiones, los profesores Bernardino Speluzzi, Peregrino Stroebel y Emilio Rosetti, contratados en Europa, abrían sus cursos, constituyendo con sus discípulos el núcleo más brillante de hombres de estudio y de acción que el país había tenido hasta entonces en esas ramas del saber humano.

Cuando el genial Sarmiento subió a la presidencia de la República, en 1868, la marea alcanzó a las provincias con la reorganización de la Universidad de San Carlos, en Córdoba, por el proyecto del sabio Germán Burmeister que creaba una facultad de ciencias matemáticas y físicas (1).

En 1870, los dos grandes focos de enseñanza superior, Buenos Aires y Córdoba, adquirieron simultáneamente una organización científica sólida y bastante completa. En la capital, los estudios químicos se cursaban en numerosas cátedras con sus laboratorios correspon-

(1) *Boletín de la Academia nacional de ciencias en Córdoba*, tomo I, página 9.

dientes, aunque modestos; y en Córdoba, el sabio Burmeister les señalaba un lugar prominente al buscar profesores para la naciente Facultad de ciencias.

Al mismo tiempo aparecían nuevas revistas científicas y literarias, industriales y agrícolas (1), que se unían a las antiguas, proporcionando terreno propicio para sus ensayos a los primeros profesores argentinos, maestros como el doctor Kyle de la generación actual, entre los cuales Pedro N. Arata se destacaba ya como una brillante promesa en su cátedra de química orgánica, mientras Antonio Catelín dictaba química farmacéutica, Tomás Péron enseñaba química inorgánica y Otto Schneider reabría los cursos de química aplicada a la industria, que había creado, en 1865, el doctor Miguel Puiggari, que profesando química analítica en la Universidad, ocupaba sin disputa y con justicia el gobierno del núcleo químico argentino de su época.

He ahí el ambiente, las instituciones y los hombres de la época en que el doctor Kyle abrazó la vida científica como hemos visto ya. Los que se entregaban entonces a la química debían ser fatalmente enciclopédicos; su bibliografía lo evidencia, es decir, debían repartir su actividad entre todas las ramas de esta ciencia. Obligados por las circunstancias, debieron echar sobre sus hombros cargas en extremo pesadas, actuando como analizadores en laboratorios oficiales o privados; asesorando a los comerciantes, a los industriales y a los mineros especialmente; practicando estudios de investigación desinteresada que han enriquecido nuestra bibliografía científica, buscando el aprovechamiento de productos naturales del país; colaborando con los naturalistas en trabajos de mérito innegable y, además, enseñando la ciencia de su predilección en nuestros colegios, escuelas especiales y universidades, cuando no llevaban la luz hasta la masas populares en conferencias de divulgación de valor tan poco apreciado como indiscutible.

Conocido el escenario, el papel a desempeñar por el joven farmacéutico graduado en 1872 y vinculado a la enseñanza en 1871, con todo el entusiasmo de los hombres de su época, fácilmente podía preverse. Cuando el espíritu luminoso e inquieto de Estanislao S. Zeba-

(1) *Boletín y actas de la Academia nacional de ciencias* (1874); *Anales de agricultura de la República Argentina* (1873); *Anales científicos argentinos* (1874); *La Plata Monatschrift* (1873); *Revista del Río de la Plata* (1871); *Anales del Círculo médico* (1877); *Anales del Museo nacional* (1864); *Anales de la Sociedad rural argentina* (1866); *Revista farmacéutica* (1858).

llos, estudiante en 1872, inició la fundación de una sociedad o academia científica, y consiguió organizarla con Emilio Rosetti, Luis A. Huergo, Guillermo White, Ángel Silva y muchos otros jóvenes, ya vemos figurar al doctor Kyle al lado de Arata, Francisco P. Moreno y Miguel Puiggari como miembro de la comisión redactora de los *Anales científicos argentinos,* antecesores de los actuales *Anales de la Sociedad Científica Argentina.*

Y entre esta publicación y la *Revista farmacéutica,* reparte las actividades de su pluma, no en tarea libresca sino reflejando la obra que realizaba paralelamente en el laboratorio. No analizaré sus trabajos en detalle, como lo hiciera en el estudio que le consagré por encargo. especialmente honroso para mí, en los *Anales de la Asociación química argentina,* pero sí haré notar que sus artículos se impusieron hasta a los sabios europeos traídos por Burmeister a Córdoba, celosos en demasía para con los estudiosos indígenas en más de una ocasión, mereciendo el honor de ser llamado al seno de la Academia nacional de ciencias como miembro corresponsal en 1874.

La hidrología, la química industrial y minera dominan en su producción, correspondiendo a sus funciones técnicas en la oficina de patentes de invención, en la casa de moneda y en las obras de salubridad, sin que deban olvidarse las iniciativas nacidas en el seno de la Sociedad Científica de una previsión patriótica admirable y entre las cuales merece citarse, como de singular trascendencia. la que se refiere al estudio del régimen y composición de las aguas subterráneas de la provincia de Buenos Aires, por medio de perforaciones sistemáticamente organizadas, abriendo nuevos rumbos a la agricultura, a la ganadería y, en general, a las industrias que dependen de una provisión ilimitada de agua potable.

Mientras así trabajaba en el laboratorio y en las revistas científicas, la organización de la enseñanza superior de la química lo preocupaba vivamente. Prueba de ello es la activa participación que tomara en el movimiento iniciado por la Sociedad nacional de farmacia para independizar la Escuela de farmacia de la Facultad de ciencias médicas, proyecto de gran significación. pues que importaba entonces constituir un instituto exclusivamente consagrado a estudios químicos y a su aplicación más inmediata en aquel tiempo. Ya en 1870, el señor Carlos Murray, que fué el alma de la asociación citada durante muchos años, realizó una gestión activa ante el gobierno, elevando a su consideración un meditado proyecto de organización de los estudios de química y de farmacia. demostrando, además, la nece-

sidad de reglamentar ambas profesiones. Fracasado este proyecto. Kyle renovó el pleito en 1875, en una asamblea extraordinaria de la sociedad, a la que asistieron, entre otros, profesores y profesionales prestigiosos como Puiggari, Arata, Parodi, Spuch, Torres, Moine y los Cranwell, y con motivo de una moción hecha en el Consejo superior de la Universidad, se resuelve pedir la separación pretendida, anexando la Escuela de farmacia a la Facultad de ciencias físico-naturales que, creada en 1874, había comenzado a funcionar en 1875.

La idea no se realizó, sin embargo, quedando la Escuela de farmacia — como nueva cenicienta — anexada a la Facultad de ciencias médicas, en tanto que la Facultad de ciencias exactas, físicas y naturales formaba, por su parte, un núcleo de enseñanzas de distintas ramas de la química, que contó a Kyle entre sus profesores desde 1889 en la cátedra de química orgánica, hasta 1896 en que se hizo cargo de la parte inorgánica, para no abandonarla sino con motivo de su jubilación.

De ese año datan mis recuerdos del doctor Kyle — que había merecido de la citada facultad el alto grado de doctor en ciencias naturales *honoris causa,* en 1889 — como profesor, asistiendo a su aula como alumno de primer año, como alumno *provinciano* que realizaba un sueño, por mucho tiempo acariciado, de escuchar a los maestros que admiraba y reverenciaba a través de comentarios de sus ex alumnos y de las publicaciones de los grandes diarios: la impresión que me produjera entonces se ha cristalizado en mi opinión ulterior, consciente, fundada y definitiva.

Éramos más de cien y dominaban los rebeldes, bullangueros, pícaros sin maldad y alegres agresivos, atolondrados, en fin, de los que Torres y Villarroel (1) ha conocido en Salamanca en el siglo XVIII y en cuyas filas él mismo militó con brillo, sin caer en los excesos del Buscón del inmortal Quevedo. Las clases, con tan abigarrado auditorio en los bancos, no carecían de la nota pintoresca, en ocasiones exagerada y molesta; pero esto no impidió que el profesor se me impusiese como poseedor de una rara erudición y de una práctica de laboratorio incomparable, aunque sin las dotes naturales de un conferenciante brillante, en una palabra, como un maestro de hombres.

Más tarde, cuando creados los cursos del doctorado en química pude acercarme a él, surgió ante mí el consultor seguro que en conversación familiar destruye dudas sin énfasis y pone, con una libera-

(1) DIEGO DE TORRES Y VILLARROEL, *Vida,* Madrid, 1912.

lidad sin límites, el tesoro de su saber, el cúmulo de datos recogidos en el trabajo diario, sobre problemas genuinamente argentinos o sobre cuestiones generales, a disposición del que comienza encontrando el camino lleno de dificultades y de sombras.

Pude apreciar en él las cualidades intelectuales que sería preciso reunir, según Humphry Davy (1), para servir al progreso de la ciencia, cualidades entre las que como más esenciales cita : la paciencia, el trabajo, la delicadeza de la manipulación, la exactitud y la precisión en las observaciones y aprecio de los fenómenos estudiados; mano hábil y un exacto golpe de vista como auxiliares más útiles. No le eran extrañas las doctrinas nuevas, las teorías audaces y revolucionarias que brotaron con el estudio de las radiaciones invisibles y de los fenómenos de desintegración atómica; el edificio del átomo no permanecía para él tal como lo habían construído sus maestros de la primera mitad del siglo XIX; la energética le era familiar desde su aparición, y sus lecturas cotidianas le permitían introducir y comentar, en sus explicaciones, la nota de actualidad que impregnaba hábilmente con su crítica original. Sin embargo, no le atrajeron las especulaciones teorizantes, y conocedor profundo del ambiente donde debía actuar, la ciencia aplicada lo ocupó por entero como a los sabios que en el país se arraigaron : Puiggari y Max Siewert, Doering y Schikendantz, consagrados a la química e igualmente convencidos de que el agricultor pierde su tiempo cuidando orquídeas bajo la escarcha, lejos de la *serre chaude,* cultivando café en el *salitral* que sólo resiste el *salt bush,* y negando a la ciénaga los sauces y las cañas...

No era tampoco un especialista en el estrecho e ingrato sentido de la palabra ; su criterio filosófico, elevado y amplio, no se lo hubiese permitido; y su cultura literaria era más que superficial contra lo que pudiera hacer suponer su presentación en la cátedra, pero que brillaba con raro destello en la conversación familiar, en el coloquio íntimo, como lo recordaba no hace mucho tiempo su digno amigo, el ilustrado profesor Eduardo Aguirre.

Cuando fuí llamado, en 1902, por la Facultad de ciencias a desempeñar las funciones de profesor suplente en la cátedra del doctor Kyle, la figura del profesor que había escuchado como alumno en 1896 se agigantó prodigiosamente; es que una vez más se cumplía la ley fatal que tan fielmente traduce el humorista inglés en dos dibujos

(1) HUMPHRY DAVY, *Consolations in travel or the last days of a philosopher* (edición española). Madrid, 1878.

inolvidables. Pinta el uno un adolescente mirando por encima del hombro a un hombre maduro y tiene como leyenda: *Así ve el hijo al padre, a los 18 años.* Muestra el otro un enano que se desnuca del esfuerzo para alcanzar a ver la cara a un gigante y tiene como título: *Así ve el hijo al padre, a los 25 años.* Y en mi caso, confieso que me hallaba en la segunda situación, sin haber merecido que se me aplicase antes la primera leyenda. Toda mi buena voluntad no podía igualar una experiencia en la enseñanza de treinta y un años y toda una vida de laboratorio.

Han pasado muchos años y la figura del *viejito Kyle,* como lo llamábamos hasta ahora sus discípulos con cariñoso respeto, ha adquirido un brillo especial, pátina rara de nobleza que su muerte acrecienta y cristaliza para siempre. Poco antes de su envidiable fin, comentando una carta suya, cariñosa y alentadora, he tratado de explicarme a mí mismo ese fenómeno de visión, este nuevo aspecto del hombre que parecía huraño, hosco y cacoquimio al desconocido, y que encerrado en la impasibilidad de su rostro seco y severo no invitaba a la confidencia que compenetra las almas. Y creo haber hallado la clave del enigma, creo haber descubierto por qué su perfil se inmovilizó y se fijó como en una medalla y por qué su nombre se condensó en un símbolo.

El secreto reside en que han pasado sobre mí, como sobre sus demás discípulos, muchos años; en que todos hemos vivido y hemos luchado; en que sabíamos antes apreciar su obra científica, su labor incesante, tenaz y fecunda, pero sólo ahora sabemos valorar su temple moral, su rectitud y su nobleza, su desinterés y su modestia, su alma sin pasiones y sin odios, su serenidad y su independencia, su personalidad ética que sería la prueba evidente de que *la science est aussi la plus grande école de morale qui existe* (1).

La muerte lo ha hallado en su hogar modelo, rodeado de afectos, descansando de la jornada laboriosa y pudiendo mirar hacia atrás en su camino, sin reproches ni remordimientos. Ahora duerme en la tierra que como patria adoptara en años muy lejanos y a la cual se diera por entero, mientras nosotros seguimos nuestra ruta, después de habernos inclinado ante su tumba, por un instante, y sin dejar asomar a nuestros labios una palabra de desaliento o de duda, porque el homenaje debido al maestro no es la emoción dolorosa que se traduce en llanto, sino el gesto viril de empuñar el martillo sobre el mismo yunque que aún vibra de sus golpes.

(1) M. BERTHELOT, *Science et libre pensée.* París, 1905.

CARGOS TÉCNICOS Y DIDÁCTICOS DESEMPEÑADOS POR EL DOCTOR JUAN J. J. KYLE

1871. Profesor de química en el Colegio nacional de Buenos Aires.
1873. Subcomisario químico de la oficina de Patentes de invención.
1881. Ensayador de la Casa de moneda.
1888. Director de la oficina de contraste de las Obras de salubridad.
1889. Catedrático de química orgánica en la Facultad de ciencias exactas, físicas y naturales.
1890. Químico de la inspección general de las Obras de salubridad.
1892. Profesor de química industrial en el Colegio nacional de Buenos Aires.
1896. Catedrático de química inorgánica en la Facultad de ciencias exactas, físicas y naturales.

CARGOS HONORARIOS

1875. Miembro académico de la Facultad de ciencias físicas y naturales.
1876. Miembro de la comisión para la ley de las monedas extranjeras.
1879. Miembro, con título, de la Junta provisoria de higiene médico-militar.
1880. Miembro honorario del Departamento nacional de higiene.
1881. Académico de la Facultad de ciencias exactas, físicas y naturales.
1885. Vicepresidente de la Sociedad Científica Argentina.
1888. Consejero de la Universidad de Buenos Aires.
1893. Miembro del Consejo escolar del distrito 12 de la Capital federal.
1895. Consejero suplente de la Universidad de Buenos Aires.

DIPLOMAS, PREMIOS Y DISTINCIONES

1851. Medallas de oro y de plata en estudios secundarios (Edimburgo).
1856. Premios en la Escuela de medicina de Edimburgo.
1870. Diploma de profesor de farmacia de la República del Uruguay.
1872. Diploma de licenciado de farmacia en la Facultad de ciencias médicas de Buenos Aires.
1874. Miembro corresponsal de la Academia nacional de ciencias en Córdoba.
1879. Miembro activo de la Academia nacional de ciencias en Córdoba.
1889. Diploma de doctor en ciencias naturales *(honoris causa)* de la Universidad de Buenos Aires.
1896. Socio honorario de la Cruz roja argentina (por servicios prestados).
1897. Socio honorario de la Sociedad Científica Argentina.
1898. Socio honorario de la Sociedad nacional de farmacia.

1907. Académico honorario del Instituto del Museo de La Plata, en la sección Ciencias químicas.

1913. Socio honorario de la Sociedad química argentina.

1913. Medalla de la campaña del Paraguay.

1916. Académico honorario de la Facultad de ciencias exactas, físicas y naturales de Buenos Aires.

ÍNDICE BIBLIOGRÁFICO DEL DOCTOR JUAN J. J. KYLE (1871-1905)

1871. *Chloralum,* en *Revista farmacéutica,* tomo IX, páginas 195 a 198, Buenos Aires.

1871. *Extracto de chiriguaná,* en *Revista farmacéutica,* tomo IX, páginas 278 a 281, Buenos Aires.

1872. *Análisis detallados de las aguas del Plata,* en *Revista farmacéutica,* tomo X, páginas 197 a 207, Buenos Aires.

1872. *Apuntes analíticos,* en *Revista farmacéutica,* tomo X, página 149, Buenos Aires.

1872. *Apuntes analíticos (de ginebra ferruginosa),* en *Revista farmacéutica,* tomo X, páginas 172 a 173, Buenos Aires.

1872. *El dosado del amoníaco y las materias orgánicas azoadas por el procedimiento Wanklyn y Chapman,* en *Revista farmacéutica,* tomo X, páginas 243 a 248, Buenos Aires.

1873. *Análisis de un mineral de manganeso de la provincia de San Juan,* en *Revista farmacéutica,* tomo XI, páginas 148 a 149, Buenos Aires.

1873. *El silicato de sosa, sus propiedades antisépticas y su acción fisiológica* (estudiados por Rabuteau y Papillon), en *Revista farmacéutica,* tomo XI, página 67, Buenos Aires.

1873. *Informe sobre los minerales y minas de las sierras de Córdoba,* seguido de una relación histórica de los trabajos mineros en la provincia de Córdoba, por el señor Alfredo Martín, un volumen in-8°, Buenos Aires.

1873. *Liebig* (articulo necrológico), en *Revista farmacéutica,* tomo XI, páginas 127 a 130, Buenos Aires.

1873. *Las sierras de Córdoba y sus plantas medicinales,* en *Revista farmacéutica,* tomo XI, páginas 75 a 77, Buenos Aires.

1873. *Observaciones sobre la composición de un mineral de hierro hallado en la provincia de Catamarca,* folleto publicado por la Sociedad Científica Argentina, Buenos Aires.

1873. *Observaciones hechas sobre el análisis de un agua de pozo de la ciudad de Buenos Aires,* en *Revista farmacéutica,* tomo XI, páginas 265 a 271, Buenos Aires.

1874. *Algunos datos sobre la composición de las aguas del río de la Plata,* en *Boletín de la Academia nacional de ciencias en Córdoba,* tomo I, páginas 234 a 239, Buenos Aires.

1874. *Análisis comparativos del agua del río y de las aguas corrientes,* en *Revista farmacéutica,* tomo XII, páginas 217 a 223, Buenos Aires.

1874. *Algunos datos sobre la composición de las aguas del río de la Plata,* en *Revista farmacéutica,* tomo XII, páginas 246 a 250, Buenos Aires.

1874. *El análisis de la leche conservada,* en *Revista farmacéutica,* tomo XII, páginas 245 a 246, Buenos Aires.

1874. *Farmacéuticos, alerta!* en *Revista farmacéutica,* tomo XII, páginas 197 a 202, Buenos Aires.

1875. *Discurso inaugural de la exposición de 1875,* en *Revista del archivo de la Sociedad científica,* tomo I, páginas 58 a 61, Buenos Aires.

1875. *Asamblea extraordinaria de la Sociedad de farmacia,* en *Revista farmacéutica,* tomo XIII, páginas 241 a 250, Buenos Aires.

1875. *El jaborandi,* en *Revista farmacéutica,* tomo XIII, páginas 51 a 53, Buenos Aires.

1876. *Observaciones sobre la composición de un mineral de hierro, hallado en la provincia de Catamarca,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo I, páginas 34 a 35, Buenos Aires.

1876. *Toxicología* (informe químico-legal), en *Revista farmacéutica,* tomo XIV, páginas 127 a 132, Buenos Aires.

1877. *Informe sobre el aserradero y curtiembre de Bletscher y compañía,* en *Revista del archivo de la Sociedad Científica,* tomo I, páginas 151 a 153, Buenos Aires.

1877. *La yerba-mate de Caá-Guazú,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo III, páginas 42 a 45, Buenos Aires.

1877. *Presencia del óxido de zinc en la sosa cáustica,* en *Revista farmacéutica,* tomo XV, página 30, Buenos Aires.

1878. *Adulteración del azafrán,* en *Revista farmacéutica,* tomo XVI, páginas 157 a 158, Buenos Aires.

1878. *Composición del agua del río Uruguay,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo VI, páginas 20 a 23, Buenos Aires.

1878. *El bismuto y sus preparados con referencia especial a la investigación del plomo en el subnitrato de bismuto,* en *Revista farmacéutica,* tomo XVI, páginas 246 a 252, Buenos Aires.

1878. *Los vinos de la República Argentina,* en *Revista farmacéutica,* tomo XVI, páginas 37 a 40, Buenos Aires.

1878. *Aerolito fósil* (de Luján), en *Catalogue général detaillé* (de la República Argentina en la) *Exposition universelle de Paris,* Buenos Aires.

1879. *Análisis de un específico,* en *Revista farmacéutica,* tomo XVII, páginas 44 a 46. Buenos Aires.

1879. *Análisis de varias muestras de tabacos cultivados en el país,* en *Anales de la Sociedad rural argentina,* tomo XIII, páginas 417 a 418, Buenos Aires.

1879. *El guano de la Patagonia,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo VII, páginas 206 a 208, Buenos Aires.

1879. *El petróleo en la provincia de Jujuy,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo VII, páginas 241 a 253, Buenos Aires. (Conferencia dada en la Sociedad Científica Argentina.)

1879. *Nota preliminar sobre el principio amargo de la corteza del ybiraro (Ruprechtia salicifolia),* en *Revista farmacéutica,* tomo XVII, páginas 226 a 227, Buenos Aires.

1880. *La boronatrocalcita de la provincia de Salta,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo X, páginas 169 a 174, Buenos Aires.

1880. *Observaciones sobre un depósito fosfático en la Patagonia,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo X, páginas 226 a 230, Buenos Aires.

1883. *Carbón fósil de Mendoza,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo XV, páginas 270 y siguientes, Buenos Aires.

1886. *El oro del cabo Vírgenes,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo XXII, páginas 75 a 78, Buenos Aires.

1887. *Análisis de una piedra meteórica,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo XXIV, páginas 128 a 133, Buenos Aires.

1887. *Incrustación de una caldera,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo XXIII, páginas 64 a 67, Buenos Aires.

1889. *Informe sobre pavimentos de asfalto,* en *Anales Sociedad Científica Argentina,* tomo XXVIII, páginas 231 a 240, Buenos Aires.

1890. *Análisis de las aguas del subsuelo de Buenos Aires,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo XXIX, página 207, Buenos Aires.

1890. *El platino nativo de la Tierra del Fuego,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo XXIX, páginas 51 a 53, Buenos Aires.

1890. *Observaciones sobre la composición de un mineral de hierro hallado en la provincia de Catamarca,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo XXIX, página 207, Buenos Aires.

1891. *Anexo III al artículo de R. León « El pozo del Balde ». Análisis de las aguas a diferentes profundidades (An. Soc. Cient. Arg.,* t. XXXII, p. 209), en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo XXXII, página 228, Buenos Aires.

1891. *Apuntes sobre la existencia del vanadio en el carbón de piedra de San Rafael, provincia de Mendoza,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo XXXI, páginas 174 a 176, tomo XXXII, página 9, Buenos Aires.

1891. *Examen químico y bacteriológico de las aguas potables, por C. Newman y A. E. Salazar,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo XXXI, páginas 305 a 309, Buenos Aires.

1891. *Soda concentrada,* en *Revista farmacéutica,* tomo XXX, páginas 236 a 237, Buenos Aires.

1892. *Análisis químicos. Apéndice al informe del señor F. Stavelius, sobre el dique de San Roque,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo XXXIV, página 135, Buenos Aires.

1892. *On a vanadiferous lignite found in the Argentine Republic with analysis of the ash,* en *Chemical News,* número 1718, London. (Read before the British Association Edinburgh Meeting, 1892.)

1893. *La fermentación de los azúcares artificiales,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo XXXV, página 235, Buenos Aires.

1893. *Licuación y solidificación de los gases. Las investigaciones de Dewar,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo XXXV, páginas 213 a 235, Buenos Aires.

1896. *El carbón vanadinífero,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo XLII, páginas 297 a 299, Buenos Aires.

1897. *La composición química de las aguas de la República Argentina,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo XLIII, páginas 19 a 25, 111 a 121, 161 a 171, 280 a 285, Buenos Aires.

1898. *Análisis químico del carbón de Tierra del Fuego,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo XLVI, páginas 236 a 257, Buenos Aires.

1899. *El manganeso argentífero de « La Cortaderita » (prov. de Mendoza),* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo XLVII, páginas 143 a 161, Buenos Aires.

1899. *El manganeso argentífero de « La Cortaderita » (prov. de Mendoza),* en *Boletín de la Unión Industrial Argentina,* tomo XIII, número 365, Buenos Aires.

1899. *Liquefacción de los gases,* en *Revista farmacéutica,* tomo XXXVIII, páginas 355 a 373, Buenos Aires.

1900. *Análisis del agua de los ríos Guerrero y Reyes (Jujuy),* en *Boletín de obras públicas de la República Argentina,* tomo I, páginas 241 a 288, Buenos Aires.

1901. *La destrucción de la mampostería por los gases cloacales,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo LI, páginas 62 a 64, Buenos Aires.

1901. *Pliego de condiciones para la provisión y recibo de cemento portland destinado a obras nacionales,* folleto de 26 × 18, 10 páginas, Buenos Aires.

1903. *La concentración de los minerales por el aceite. Sistema Elmore,* en *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo LV, páginas 5 a 10, Buenos Aires.

1905. *El bronce en la región calchaquí,* en *Anales del Museo nacional,* serie 3ª, tomo IV, páginas 163 a 312, Buenos Aires.

ENRIQUE HERRERO DUCLOUX.

La Plata, 1922.

NECROLOGÍA

DOCTOR JUAN J. J. KYLE

† el 23 de febrero de 1922

En nombre de la dirección y del cuerpo de profesores del Colegio nacional de Buenos Aires, y en representación de la Sociedad Científica Argentina, vengo a dar el último adiós al que fué nuestro más querido y autorizado maestro.

Si de alguno puede hablarse de su vida bien cumplida es sin duda del profesor Kyle.

Su erudición, su sencillez, su corrección y su honradez científica se han hecho proverbiales. Su saber profundo unido a una modestia innata hacían del doctor Kyle el prototipo del profesor, no del profesor que va a exponer sus conocimientos en provecho propio sino del que trata de inculcarlos al que no sabe.

Recuerdo como si fuera hoy las clases que nos diera en la vieja aula de la calle Bolívar. Lo veo aún rodeado de retortas, tubos y vasijas, manipulando con precisión matemática y explicando sus lecciones con un lujo de detalles sólo propio de un sabio y con una sencillez de concepción sólo patrimonio de un maestro.

Es que el viejo Kyle, como lo llamáramos sus alumnos, a pesar de no poseer precisamente el don de la palabra, tenía una erudición tan grande y una habilidad tal para experimentar, que dejaba en sus alumnos, en todo momento, la impresión de la verdad adquirida.

El valor de un profesor está sin duda en el impulso que sabe dar a sus alumnos : Kyle era uno de éstos. Su ejemplo infundía respeto y prodigaba ansias de imitarlo. Debo confesar en este momento que a él le debo la orientación de mis estudios.

Inglés de nacimiento, fué argentino de corazón. Lo demostró en la guerra del Paraguay acompañando a nuestro ejército como farmacéutico.

Demostró aún más su patriotismo y su amor a su país de adopción haciendo conocer sus riquezas naturales. Nada puede decirse escapó a su penetrante análisis, y sus estudios de nuestras materias primas pueden mencionarse como modelos de trabajo paciente y de correcta interpretación científica.

Era el doctor Kyle intensamente bueno, de ceño adusto, ocultaba un corazón de oro, incapaz de una maldad, no podía tener enemigos, y cuando en nuestro viejo Colegio nacional se colocó su nombre a la entrada de una de sus aulas de química, todos comprendieron que ese acto de justicia no podía empañar la sencillez y la modestia de este grande hombre.

Su vida de intenso trabajo se repartía entre la enseñanza y su laboratorio de la Casa de moneda.

En el Colegio nacional se encuentran aún muchas de las colecciones llevadas por él. Está aún allí una tabla ozonoscópica que él usara en las azoteas del colegio para analizar el aire en tiempo de la fiebre amarilla, y considero como un deber de señalar, todos los años, estos datos a mis alumnos para que aprecien en su justo valor las cualidades del profesor que en aquel entonces enseñaba la química.

En la Casa de moneda su actuación no fué menos proficua, y basta señalar el hecho de que el Banco de Inglaterra recibiera como oro amonedado el analizado por él, para que comprendamos hasta dónde llegaba su habilidad y su honradez científica.

Socio honorario de la Sociedad Científica Argentina, desempeñó en ella varios cargos incluso el de presidente, lo que demuestra el respeto con que se le consideraba.

Sus publicaciones en la *Revista farmacéutica,* en los *Anales científicos argentinos* y en los actuales *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* son muchas y muy importantes y se suceden sin interrupción durante muchos años.

Su actuación en la Facultad de ciencias exactas, físicas y naturales no es menos importante y fué uno de los eficientes creadores de nuestra Escuela de química. Allí lo he vuelto a ver como alumno suyo y de nuevo tuve oportunidad de apreciar sus dotes de profesor.

No puede darse una vida mejor cumplida, no puede haber un descanso más merecido.

¡Maestro! La vida de los hombres como tú se prolonga indefinidamente. Tu espíritu flota constantemente en nuestro alrededor y tu ejemplo nos da bríos y nos impulsa a imitarte.

Sentimos palpitar tu alma, más joven y más activa que nunca. La semilla sembrada por tí se ha multiplicado y la cosecha que te debemos es cada vez más abundante.

DOCTOR ADOLFO MUJICA

† el 21 de enero de 1922

Ha causado pesar el fallecimiento del doctor Adolfo Mujica, acaecido el 21 de enero último, en forma repentina e inesperada, en Santiago del Estero.

La fatalidad lo abatió en circunstancias en que mostraba su energía de batallador veterano y cuando todos fiaban en su pericia, un anuncio de progreso y adelanto en las instituciones del país, a las que ha dedicado el esfuerzo de sus actividades, en los distintos campos en que actuó, la cátedra universitaria, la tribuna política y los altos cargos gubernativos.

La desaparición violenta del doctor Mujica ha producido en nuestros círculos científicos, sociales y políticos, un claro sensible, pues su pérdida significa la ausencia de un espíritu sereno y caballeresco que, en su incesante actividad, nunca desmayaba en la aplicación de todas sus cualidades, para impulsar y obtener la implantación de todo lo que significara progreso en nuestra legislación o mejora en el mecanismo de nuestras oficinas técnicas o aumento en el caudal de conocimientos de la naturaleza de nuestro país.

Como universitario distinguido ha actuado desde joven en nuestros círculos científicos y dejó sentir la energía de su acción personal en la enseñanza que efectuó en forma amplia, clara y elegante, desde las cátedras de las universidades de Buenos Aires y de La Plata, así como también en la lucha que por el progreso impulsaba con sus actividades en la política comunal y nacional.

Su proceder en la cátedra era decidido. Los que escucharon sus lecciones, difícilmente olvidarán el dominio e influjo que ejercía sobre su auditorio, al que inculcaba los principios científicos más difíciles, con la facilidad que sólo podía ejercer debido a la noción segura y concreta de los temas que, para él, no poseían secretos y cuyas causas originarias discutía con evidente clarovidencia.

Nació en Gualeguay el 11 de junio de 1867, y muy joven vino a Buenos Aires, donde cursó sus estudios universitarios, graduándose de farmacéutico en el año 1887 y luego de doctor en jurisprudencia en el año 1894, egresando de la Facultad de derecho con diploma de honor.

En el año 1895 fué nombrado catedrático de botánica médica, en la Universidad de Buenos Aires, desempeñando la cátedra con pequeñas interrupciones hasta el año pasado.

En 1901 fué nombrado profesor de filosofía del derecho en la Universidad de La Plata. En el mismo año fué electo miembro del Consejo deliberante por la parroquia de Monserrat, y en 1897 por la de La Piedad, iniciando sus actividades en la política y delineando los caracteres de su personalidad que buscaba campos de acción más extensos y a los que llegó con la constancia y asiduidad desplegada.

Acompañó al doctor Bernardo de Irigoyen en el gobierno de la provincia de Buenos Aires, ocupando el cargo de secretario y siendo propuesto para el de jefe de policía de la provincia.

Desempeñó el cargo de diputado al Congreso nacional, desde 1902, ocupando la banca parlamentaria durante tres períodos. En 1902 fué elegido por la provincia de Buenos Aires y en 1906 y 1910 volvió al Congreso como representante de la provincia de Entre Ríos.

En la Cámara de diputados presentó numerosos proyectos e intervino frecuentemente, como uno de los miembros más asiduos, en los debates más importantes. Su acción se destacó en las discusiones de las leyes de residencia, la de Exposición del centenario de 1910, la de monumento al doctor Bernardo de Irigoyen, la del puerto de Rosario, la de administración de los ferrocarriles del Estado, la ley de incompatibilidades, la de Defensa agrícola, la de reforma de la carta orgánica del Banco Hipotecario nacional, la ley electoral actualmente en vigencia, y muchas otras.

Designado ministro de Agricultura en 1911, por el presidente doctor Sáenz Peña, afrontó el estudio preferente de las siguientes cuestiones : represión del trust de la carne, ley de protección a los colonos, leyes de enseñanza agrícola y chacras experimentales. En colaboración con los ingenieros Luis A. Huergo, Enrique Hermitte y Schneidewind se ocupó de las condiciones de explotación del petróleo de Comodoro Rivadavia. También dedicó su atención a las leyes sobre mercado general de haciendas, la de pesas y medidas, y muchos otros proyectos que todavía esperan la sanción legislativa.

En 1914 renunció el cargo de ministro de Agricultura y, a pesar de

alejarse de las esferas gubernativas, continuó trabajando activamente e impulsando el progreso de su provincia natal con la fundación de una de las instituciones agropecuarias más importantes de Entre Ríos : la sociedad anónima Las Flores, al mismo tiempo que efectuaba investigaciones históricas sobre los orígenes y fundamentos de nuestra legislación actual, difundiendo en libros, artículos y conferencias, el resultado de sus estudios sobre las personalidades de Mitre, Urquiza, Alberdi, etc.; sobre la organización obrera y el Estado; sobre finanzas y situación económica del país.

Prestó su ayuda y formó parte de numerosas comisiones, en las que siempre fué estimado por su actividad desinteresada, como ser en los festejos organizados en Buenos Aires con motivo de la paz europea y entre otras muchas, presidió los festejos extraordinarios efectuados en Paraná, en el aniversario de la firma del Pacto de la Unión en San José de Flores y con motivo de la inauguración del monumento al general Urquiza.

INGENIERO CIVIL ALBERTO D. OTAMENDI

† el 14 de febrero de 1922

Uno de los más distinguidos profesionales, el ingeniero civil Alberto D. Otamendi, acaba de pagar el triste tributo que a sus hijos impone la madre naturaleza.

La cátedra, el círculo científico, pierden al profesor amigo, sincero y adicto en todo tiempo; al espíritu luchador que tantas energías puso al servicio del estudio y de la enseñanza.

Con lenguaje claro y convincente en el Colegio nacional, en la Escuela de comercio; analítico y preciso en la Facultad de ingeniería de La Plata y erudito e intensivo en el consejo académico de la Facultad de ciencias físico-matemáticas, difundió todas sus múltiples enseñanzas con ejemplar constancia.

Formó parte varias veces entre los dirigentes de la Sociedad Científica Argentina, a la que favoreció con proyectos e ideas de importancia.

Miembro caracterizado de la Asociación nacional del profesorado, fué, en ese carácter, uno de los fundadores del Banco escolar argentino, del que desempeñó los cargos de gerente y presidente.

Vicedecano de la Facultad de ingeniería de La Plata, pasó a ocupar el decanato cuando el ingeniero Eduardo Huergo fué elegido

presidente de la Universidad, falleciendo en el ejercicio de tan alto y representativo cargo.

En el sepelio de sus restos hablaron : el doctor Benito Nazar Anchorena, en nombre de la Universidad de La Plata; el ingeniero F. A. Soldano, como representante de la Facultad de ingeniería de aquella ciudad, y el doctor ingeniero Carlos M. Morales, de la Sociedad Científica Argentina.

He aquí la palabras del ingeniero doctor Carlos María Morales :

« Señores :

« Se me ha pedido que asuma en este acto la representación de la Sociedad Científica Argentina, y he aceptado la dolorosa misión, porque no debemos separarnos de estos restos mortales sin que se diga cuánto hizo este noble amigo por la prosperidad de la asociación que durante medio siglo ha trabajado en una labor incesante, en pro del adelanto de las ciencias y del progreso del país en todas sus manifestaciones.

« Al servicio de esta obra llena de dificultades, y muchas veces ignoradas, puso Alberto Otamendi todas sus energías de luchador y toda su ciencia y experiencia.

« Fué factor eficaz en diferentes períodos en los puestos de primera fila en sus comisiones directivas; colaboró en sus congresos científicos y en sus asambleas, y su palabra serena y siempre sincera, de intelectual y de caballero, fué siempre escuchada con el respeto que merecía.

« También deja el ingeniero Otamendi recuerdos imborrables entre sus colegas y discípulos, porque actuó en las luchas de la vida con una nobleza de sentimientos, con un espíritu optimista, que le hacían marchar hacia adelante sin desfallecimientos, subiendo paso a paso la áspera pendiente, sin arredrarse por los obstáculos y con la vista fija en la cumbre de sus ideales siempre nobles y generosos.

« Todo proyecto que tendiese al adelanto del país, encontró su apoyo decidido; las actas de la Sociedad Científica Argentina dan fe de su labor inteligente y tesonera en todas las iniciativas que allí se tomaron ; y es para nosotros un inmenso dolor ver desaparecer en mitad de la jornada a este compañero que encarnaba en su simpática personalidad las características del caballero en la más amplia acepción de la palabra.

« En nombre de la Sociedad Científica Argentina doy el último adiós a quien tan abnegadamente la sirviera, sirviendo al propio tiempo a la patria. »

BIBLIOGRAFÍA

La teoría de la evolución y las pruebas en que se funda, por WILLIAM B. SCOTT, traducción de Antonio de Zulueta, 210 páginas. Calpe, Madrid, 1920 (8 pesetas).

El profesor Scott, conocido entre nosotros ante todo por sus extensos estudios sobre la paleontología de la Patagonia, ha reunido en este tomo un ciclo de seis conferencias de vulgarización dadas en 1914 en el Wagner Institute. Expone en la primera las opiniones de los naturalistas con respecto a las causas que pudieron haber influído en la evolución orgánica, explicando ante todo las ideas clásicas de Lamarck, Darwin, Weismann y de Vries. Las conferencias restantes están dedicadas a pasar revista a las pruebas suministradas en favor de la teoría evolucionista por las distintas ramas de la biología, explicándose en esta ocasión también los resultados deducidos de estudios del todo modernos, como ser los obtenidos por las reacciones de la sangre y por la biología experimental.

Las conferencias del profesor Scott son un modelo de exposición clara y no requieren mayores conocimientos previos en la materia, pues todos los términos científicos están explicados. Pueden recomendarse a todo el que desea orientarse en general sobre el estado actual de la teoría de la evolución, y, en especial, a todo estudiante universitario.

El autor dice en su prólogo que fué determinado a elegir la teoría de la evolución, como tema de un ciclo de conferencias, por haber observado que va abriéndose paso entre el público culto la creencia del todo injustificada, de que la teoría evolucionista es un artificio ya desechado por los naturalistas.

En efecto, el libro entero está dedicado a probar que « los que estudian los animales y vegetales nunca estuvieron antes tan de común acuerdo como lo están hoy en aceptar aquella teoría ». Lo que se discute es no la evolución, sino la manera cómo ésta pudo haberse efectuado y sus causas. El error en que suele caer el público se debe no poco a que el término « darwinismo » que debiera aplicarse en rigor sólo a la explicación dada por Darwin de las causas de la evolución, vale decir a la teoría de la « selección natural », suele usarse también incorrectamente en sentido más vasto para denominar la teoría de la evolución orgánica toda entera, y de ahí que mucha gente al oír, que tal o cual biólogo rechaza el « darwinismo », cree que ataca la teoría evolucionista.

¿ Quién, al leer el primer capítulo de Scott, no recuerda aquel conato de ataque llevado también entre nosotros hace algunos años a la teoría de la descendencia, hábilmente disfrazado por una crítica — no muy difícil — de ciertas ideas emitidas por Florentino Ameghino ?

M. Fernández.

Evolución y Mendelismo (Crítica de la teoría de la evolución), por Th. H. Morgan, traducción de Antonio de Zulueta, 177 páginas. Calpe, Madrid, 1921 (6 pesetas).

Este libro del conocido zoólogo experimental no es, como pudiera inferirse de su subtítulo, una crítica de la teoría evolucionista, sino una exposición crítica de los trabajos y de las teorías que se refieren a los medios de que se ha valido la evolución en opinión de los diversos autores. Por esto la obra, aunque en algunas partes del todo elemental, como por ejemplo en el primer capítulo que es una exposición muy abreviada de la teoría de la evolución, no es, en general, de muy fácil comprensión para el lector poco versado en la materia.

El cuerpo principal del libro lo constituye la exposición de los estudios sobre mendelismo y las teorías que de ellos derivan (capítulos II y III). El autor no se limita a exponer los datos fundamentales, sino que entra en detalles bastante difíciles, y aun enteramente hipotéticos, como ser la ubicación topográfica de los factores dentro de los cromosomas.

En estos capítulos las extensas series de experiencias llevadas a cabo por Morgan y su escuela en la mosca del vinagre *(Drosophila)*, constituyen la base de la exposición. Si bien es cierto que estos estudios son de importancia capital, no lo es menos, que ellos no constituyen « el » eje de la genética, al rededor del cual gira todo lo demás, conclusión errónea a que deberá llegar todo aquel, que sin conocer esta parte de la biología, recurriera al libro de Morgan para su ilustración general. No corresponde a la verdad histórica, si por ejemplo la « herencia ligada al sexo » se explica en la mosca del vinagre, haciendo seguir los estudios en el hombre y en las gallinas domésticas, y citando sólo al final del capítulo como un « caso comparable » el de la mariposa *Abraxas*, mientras este último ha sido el primero descrito e interpretado, pues fué publicado en 1906, mientras los estudios de *Drosophila* comienzan en 1910, siendo los otros aún más recientes. Me parece también que en un libro que se ocupa de estudios harto especiales, es siempre conveniente citar por lo menos los trabajos más importantes, a fin de que el que quiera entrar más a fondo tenga una guía para encontrar las memorias originales. Es sensible que en el libro de Morgan sólo de vez en cuando figure un nombre de autor, casi nunca el año de la publicación, y un índice bibliográfico falte por completo,

Pero aparte de estas observaciones, me parece que la lectura de este libro, lleno de ideas originales y cuyo autor está en primera fila entre los zoólogos modernos, será de valor positivo para todo aquel que aborde su lectura con una cierta dosis de espíritu crítico, y debemos agradecer al profesor Zulueta la versión castellana que nos presenta.

M. Fernández.

FLUOR NORMAL EN UVAS DE ESPAÑA

Por MARTINIANO LEGUIZAMÓN PONDAL

PROEMIO

La tan larga y debatida cuestión de la existencia normal del fluor en los vinos, no obstante las contribuciones de eminentes químicos europeos y del personal técnico de las Oficinas químicas nacionales, quedaba sin solución, pues su presencia en algunos vinos, de genuinidad garantizada por sus elaboradores, no bastaba para afirmar que el fluor fuese normal, por lo que, tácitamente, se convino en efectuar investigaciones sobre uvas, desechando los vinos.

En 1914 se realizaron experiencias, con uvas de las diferentes regiones vinícolas del país, en el laboratorio de estas oficinas y en presencia del ingeniero agrónomo don Cristóbal Mestre, comisionado por el gobierno español, quien pudo comprobar el resultado negativo de los ensayos.

Cabía siempre la posibilidad de la existencia normal del fluor en las uvas cosechadas en otros países, y como el técnico español citado insistiese en que las uvas de su país lo contenían dada la naturaleza de los terrenos en que se cultiva la vid en España, el gobierno argentino dictó el decreto del 14 de mayo de 1917 en que se reconocía la necesidad de realizar la investigación con uvas cosechadas en España, la que se llevaría a cabo cuando fuese oportuno por un químico caracterizado del personal de las Oficinas químicas nacionales que la dirección propusiese.

Tal era el estado en que estaba el problema cuando el señor ministro de Hacienda creyó conveniente encomendarme la investigación

de referencia, la que despertó en los centros científicos y vinícolos europeos el más vivo interés.

El director de la Estación enológica de Villafranca del Panadés, ingeniero agrónomo don Cristóbal Mestre, se dirigió a su jefe el señor ministro de Fomento de España, pidiéndole permiso para ofrecerme el laboratorio de la Estación enológica, así como todo el material de drogas y aparatos que pudiese necesitar para los ensayos analíticos, a lo que el señor ministro accedió gustoso ordenando que se nos facilitara también el cometido de la toma de muestras, pues quería vincular los químicos españoles a esta investigación.

EXISTENCIA DEL FLUOR EN LA NATURALEZA

Reino mineral. — Además de encontrarse constituyendo minerales como la fluorina (CaF_2) y la criolita ($Al_2F_6 6NaF$) o espato de Groenlandia, se le puede hallar como principio fundamental de un gran número de especies mineralógicas escasas, como el topacio, la fluoceína, etc.

También lo contiene la apatita (Knapp, *Chimie technologique,* t. II, pág. 713), en proporción que alcanza a 15 por ciento de fluoruro de calcio.

En la fabricación de superfosfatos con apatita, se tiene siempre en cuenta la presencia del fluor y cuando se agrega el ácido sulfúrico se desprenden : ácido fluorhídrico y fluoruro de silicio (Molinari-Estalella, *Química aplicada,* t. II, pág. 211 y 215) al estado gaseoso (Chabrie, *Chimie appliquée,* t. I, pág. 176) los que hay necesidad de retenerlos para que no se escapen a la atmósfera.

Existe también el fluor en las diferentes variedades de fosfatos naturales (Sorel, *Grande industrie chimique,* t. II, pág. 581) entre los que pueden citarse los huanos.

En los sulfuros de hierro (piritas) constituye una impureza que causa trastornos en las fábricas de ácido sulfúrico (Sorel, *loc. cit.,* t. II, pág. 83).

En nuestro país, al decir de Stappenbeck (*Minerales de la Argentina,* pág. 12. 1918), se conoce solamente el pequeño yacimiento de fluorita en San Roque (Córdoba). Los demás hallazgos mencionados por Brackenbusch (*Die Berg. Argentinischen Republik,* pág. 21) y Stelzner (*Beitrage,* etc., págs. 226 y 245) tienen solamente interés mineralógico.

En cuanto a la apatita, se la halla en un gran filón en La Cumbre, Córdoba (véase Boudenbender, *Minerales de la provincia de Córdoba,* pág. 122).

La presencia del fluor ha sido igualmente señalada en muchos minerales silicatados (Moissan, *Chimie minerale,* t. I, pág. 641) buscándolo sistemáticamente Gautier y Clausmann *(Comptes rendus de l'Academie de sciences,* t. CLVII, pág. 821) lo han encontrado en todos los casos en tierras de aluvión, arcillas, feldespastos, gres, arenas, rocas, tierras arables, emanaciones volcánicas, gases de *soffioni,* también en pequeñísimas cantidades en el agua de mar, tanto en la superficie como en muestras tomadas a grandes profundidades *(Comptes rendus,* t. CLVIII, pág. 1632).

Estos mismos químicos (véase *Comptes rendus*, t. CLVIII, pág. 13) han evaluado los fluoruros en el agua de los ríos Garona, Sena, Loira, Marne, Rodano, Rhin, Oise, Iser, Herault, etc., y en infinidad de aguas minerales lo hizo Carles, quien estudió 93 de ellas.

Gautier y Clausmann *(Comptes rendus*, t. CLVIII, p. 1633) lo valoraron en aguas conocidas como las de la fuente Hôpital (Vichy) en 4,6 miligramos por litro; Hunyadi Janos en 1,04 por litro; Gran Grille (Vichy) en 4,3 por litro; y la de Celestins (Vichy) en 4,6 por litro; Contrexeville en 1,2 y Chatel Guyon en 1,10 por litro, etc.

Fué encontrado en los huesos fósiles en 1806, por Proust *(Journal de physique,* t. XLII, pág. 224), siendo hallado después en los huesos de los animales vivientes por infinidad de químicos. Carnot hace notar que los huesos fósiles contienen mayor cantidad de fluoruros que los huesos actuales, y tanto más cuanto más antigua es la época geológica a que pertenecen.

En la investigación realizada en esta oficina *(Existencia normal del fluor,* pág. 42) se pudo dosificar en yesos y en fosfatos de calcio considerados como puros.

Reino vegetal. — Los fluoruros han sido encontrados en los tallos silíceos de hierbas y plantas equisetáceas por Wilson *(Journal Prakt. Chem.,* t. LVII, pág. 246). Mené *(Comptes rendus,* t. L, pág. 731) los halló en troncos fósiles y en las hullas, hecho que no era concluyente porque se podía atribuir su origen a causas externas de los mismos vegetales, hasta que fué encontrado en infinidad de ellos por Ost *(Berichte Chimische Gesellchaft*, t. XXVI, pág. 151), principalmente en las cenizas de las gramíneas.

Alvisi *(Gazzeta chimica italiana,* t. XLII, pág. 451) ha caracteri-

zado el fluor en el trigo, en cuyo cereal es posible hallarlo si se opera sobre 5 kilogramos de substancia.

Carles *(Annales de chimie analitique,* t. CCXCVI, año 1911) admite que se encuentra en pequeñísimas cantidades tanto en las hojas como en los sarmientos y el fruto de la vid.

Horstmann *(Annales de chimie et physique,* t. CXIV, pág. 510) ha demostrado que ciertas plantas, como los porotos y la cebada, no se desarrollan completamente en ausencia de fluoruros, hechos que concuerdan con la experimentación de Alvisi *(Gazzetta chimica italiana,* pág. 450, año 1912), sobre ciertos cereales, que lo ha llevado a patentar un sistema de abonos fluorurados de gran eficacia contra el raquitismo.

Reino animal. — Al estado de fluoruro de calcio ha sido encontrado en la caparazón de los caracoles por Carles *(Annales de chimie analitique,* pág. 296, 1911).

En cualquiera de las partes del organismo humano que se le ha buscado ha sido con resultados positivos. En los dientes lo halló Moricini, citado por Berzelius *(Chimie,* edición francesa, t. VII, pág. 472): en los huesos lo halló Carnot, Horsford *(Annalen Liebig,* t. CIXL, pág. 202) lo hizo en cerebros. Gautier y Clausmann lo encontraron y dosificaron en la piel del hombre y de algunos animales *(Comptes rendus,* t. CLVI, pág. 1347), en los cartílagos y tendones *(loc. cit.,* t. CLVI. pág. 1425), en los huesos del recién nacido *(loc. cit.,* t. CLVI, pág. 1427), en escamas y espinas de peces *(loc. cit.,* t. CLVI, pág. 1428), en cabellos, uñas, timo, testículo, cerebro, médula, ovario, cuerpo amarillo, pulmones, cuerpo tiroides, páncreas, hígado, bazo, riñón, estómago, músculos, cristalinos, sangre, glándula mamaria, leche, orina, bilis, etc. *(Comptes rendus,* t. CLVII, pág. 94) donde acompaña siempre al fósforo aumentando su proporción cuando aumenta éste.

Para que exista en el organismo, de una manera tan general, desde el recién nacido hasta los ancianos es necesario no sólo recibirlo de la madre sino que sea ingerido en los alimentos.

ACCIÓN DEL FLUOR SOBRE EL ORGANISMO

Cuando las Oficinas químicas nacionales no aceptaron algunas partidas de vinos por contener fluoruros, no faltó químico que al ser designado por los dueños de las mercaderías rechazadas para repetir

los análisis oficiales, que, para agradar más a sus clientes, llegase a sostener como benéfica para el organismo la acción de los fluoruros, sin aportar, en apoyo de esta aventurada opinión, ningún dato concreto.

En la actualidad, la presencia del fluor y su acción sobre el organismo es más conocida, y se puede contestar la aseveración del técnico propagandista de los fluoruros manifestándole que su parecer es equivocado, si bien el fluor es normal en el organismo.

Gautier y Clausmann, en los prolijos análisis a que nos hemos referido más de una vez, encontraron que en el hombre la cantidad ingerida diariamente en los alimentos es mayor que la perdida por la orina y las heces, debiendo sumarse a ésta la que va comprendida en los cabellos, uñas, descamaciones, etc., y que los órganos son tanto más ricos en fluor cuanto más lo son en fósforo, riqueza que para el mismo órgano aumenta según zonas y con la edad, para decrecer en la vejez, por lo que admiten una unión entre estos elementos, creyéndose que el fluor desempeña el papel de *satélite* del fósforo aumentando tal vez la sensibilidad, lo que permitiría al fósforo fijarse en los tejidos.

Además, por aparecer siempre en mayor proporción en las partes duras del organismo, aceptan para el fluor la propiedad de endurecer los tejidos, mientras que según otros autores es de acción nociva.

En un trabajo sobre el cuerpo tiroides y los fermentos oxidantes, Goldenberg encontró *(Semana médica,* nº 50, 1917) que los fluoruros, entre otras substancias tienen una acción frenadora sobre las oxidaciones *in vitro* provocadas por las oxidaciones animales, y como la glándula tiroides es el único órgano productor de todas las oxidasas directas de los animales muy evolucionados, admite que los fluoruros presentes en ciertas aguas irían a inhibir o frenar la formación de oxidasas activas, resultando oxidaciones incompletas y substancias tóxicas, las que excitarían el funcionamiento del tiroides que se hipertrofia para aumentar la producción del fermento necesario al organismo, destruído continuamente por los fluoruros por ser continua su absorción por el agua de bebida, llegando al bocio.

Estas observaciones concuerdan con la opinión de casi todos los autores, en el origen hídrico del bocio endémico, observado en nuestro país, así como en el extranjero en las poblaciones de comarcas montañosas, o que se alimentan con agua de origen serrano.

La presencia del bocio es universal, reconociéndose su influencia nefasta, no solamente en el hombre, sino también en todos los animales domésticos, como caballo, vaca, oveja, cabra, puerco, etc., y sobre todo el asno (Jaccoud, *Dictionnaire de médecine,* t. XVI, pág. 471).

Mezclando durante cuatro meses fluoruro de sodio a los alimentos de una perra, Maumené (*Comptes-rendus,* febrero de 1866) produjo en ella el bocio, y de ahí que fuera el primero en atribuir al fluor la causa de éste; pero como Baumann descubrió y separó en la glándula tiroides un producto que contiene 9,3 por ciento de yodo que llamólo tiroidina, eficacísimo contra el bocio, se atribuyó éste a la falta de yodo en las aguas de alimentación de ciertas regiones, y nadie recordó más la experiencia de Maumené.

Goldenberg (*Semana médica,* pág. 9, 1919), que había demostrado *in vitro* la acción frenadora de los fluoruros sobre las oxidaciones, inició una serie de ensayos con fluoruros en cobayos para provocar experimentalmente el bocio, habiendo comprobado que si se inyectan periódicamente pequeñas dosis de fluoruro de sodio o de amonio a animales jóvenes, el crecimiento en peso es retardado y se producen descensos de temperatura de 1 a 1,5 grados.

En sus experiencias Goldenberg observó la formación de úlceras con desprendimiento de la piel y verdaderas necrosis en el sitio de las inyecciones; formación de trombo flebitis después de varios días de inyecciones intravenosas, que al destruir las venas impedían la introducción de los fluoruros; en cambio los animales testigos que recibían las mismas dosis, pero de cloruro de amonio, no presentaban ninguna alteración. Estos inconvenientes, debidos a la acción fisiológica de los fluoruros, obligaron a Goldenberg a ensayar la vía digestiva en dosis diarias de 0,2 gramos, comprobando la muerte en pocos días por caquexia debida a úlceras del estómago.

El mismo autor (Goldenberg, *Semana médica,* pág. 45, 1921) cita resultados más concluyentes por experiencias con ratas blancas. En efecto, después de seis u ocho meses de ingestión diaria de 2 a 3 miligramos de fluoruro de sodio las ratas mueren, notándose que presentan una hipertrofia tiroidea o bocio, cuyo volumen ès de cinco a seis veces el de la tiroides normal, e histológicamente presenta los caracteres de bocio parenquimatoso y coloideo. El riñón se presenta afectado de nefritis epitelial o tubular, y las ratas jóvenes, alimentadas con fluoruro de sodio, presentan un cuadro clínico semejante al cretinismo tiroideo.

Sollmann, Schettler y Wetzel (*Journal Pharmacology and Experimental Therapeutics,* abril 1921), experimentando con ratas blancas alimentadas con fluoruro de calcio, llegan a las mismas conclusiones que el autor argentino, aunque en la larga bibliografía no lo mencionan, por lo que se ha suscitado una cuestión de prioridad.

ACCIÓN DEL FLUOR COMO DESINFECTANTE

Sir William Thomson comprobó que los compuestos del fluor, tales como el ácido libre, los fluoruros neutros y ácidos de sodio, potasio y amonio, muestran propiedades antisépticas y, al igual que el ácido bórico, detienen el desarrollo de las bacterias pero no las destruyen.

Como antisépticos sólo son, en consecuencia, de acción moderada.

El hidrofluosilicato sódico, del cual se conoce una solución en el comercio bajo el nombre de *salufer,* y el fluoruro de boro, conocido con el nombre de *pyricit,* han sido objeto de ensayos como desinfectantes.

Effront (*Bulletin Société chimique,* t. V, pág. 734, y VI, pág. 705) introdujo el uso del ácido fluorhídrico y de sus sales para detener las fermentaciones láctica y butírica en destilería, y llegó a aclimatar levaduras a la acción de dosis de fluoruros 15 veces mayores que la tóxica. El ácido libre favorece la acción diastásica de las levaduras aclimatadas retardando las fermentaciones butíricas y lácticas.

Braund (*Zeitschrift für Braw,* t. XXVII, pág. 115) asegura que la solución de 5 por mil de fluoruro amónico ácido se usa mucho para desinfectar las tuberías de goma usadas en las fábricas de cerveza, siendo un poderoso antiséptico que no ataca al caucho del material.

Los fluosilicatos poseen propiedades antisépticas más acentuadas que los fluoruros. No son tóxicos, son inodoros y poco solubles en el agua. Sus soluciones dan reacción débilmente alcalina, pudiéndose usar por esta razón en la conservación de alimentos, a los que no comunican sabor alguno.

Las soluciones de fluosilicato amónico al 6 por mil no irritan las heridas, siendo en cambio fuertemente antisépticas para los tejidos animales y más eficaces que las de bicloruro de mercurio al 1 por mil, excesivamente concentrado ya para usos quirúrgicos por resultar tóxico.

El ácido hidrofluosilícico es el principio activo del producto conocido por *montanina,* obtenido como subproducto de la fabricación de la porcelana y del *keramyl* que no es más que una solución de ácido hidrofluosilícico al 25 por ciento, según Prior (*Journal Society of Chemical Industry,* pág. 404, 1909).

De acuerdo con estas propiedades, los compuestos del fluor han sido usados en la conservación de los vinos, admitiendo Blarez (*Exis-*

tencia del fluor en los vinos españoles, 1914) que la dosis de los fluoruros alcalinos, para ser eficaz como antiséptico, debe ser mayor de 10 gramos por hectólitro, es decir, 10 miligramos por 100 centímetros cúbicos de vino.

MÉTODOS DE ANÁLISIS

Guglialmelli, Rumi y Carbonell en la *Existencia normal del fluor en los vinos,* página 18, enumeran todos los procedimientos propuestos para investigar y evaluar el fluor y, de todos ellos, resultan como más exactos y sensibles, el que siguieron Gautier y Clausmann *(Comptes rendus,* t. CLIV, pág. 1469) en sus metódicas y pacientes investigaciones y el de Blarez *(Vins et spiritueux,* pág. 218, 1908) que si bien desde el punto de vista cuantitativo sólo da valores aproximados, tiene en cambio la enorme ventaja de ser sensible y sencillo, por lo que ha sido preferido en la Argentina como método oficial, y hasta los mismos Gautier y Clausmann lo usan por su sensibilidad cuando se trata de determinaciones cualitativas de pequeñísimas cantidades de fluoruros; pero separan previamente del precitado barítico la sílice, con lo que aumentan la sensibilidad del método.

Como de este procedimiento hemos visto infinidad de transcripciones que son incompletas, y como es necesario operar siempre de idéntica manera, tomando las precauciones indispensables para que haya uniformidad en la clase del vidrio, grado y duración del calentamiento de la solución fluorurada, extensión de los vapores fluorhídricos, espacio para el desprendimiento de vapores, etc., y como introducimos una serie de reformas y damos detalles que Blarez ha omitido, transcribimos a continuación el procedimiento y las modificaciones propuestas.

Blarez *(Vins de Spiritueux,* pág. 220) dice que « se toman 10 centímetros cúbicos de vino. En el caso de que el vino no sea enyesado, se le agregan algunas gotas de una solución concentrada de sulfato sódico ».

Nos parece mejor fijar la cantidad de sulfato sódico en un gramo, que se introduce tomando 5 centímetros cúbicos de una solución al 20 por ciento.

Después Blarez « agrega 10 centímetros cúbicos de una solución de acetato bárico al 10 por ciento », pero no dice nada, que estas operaciones se han de efectuar a la temperatura del ambiente, porque el

ácido tártrico de los vinos, como lo han comprobado experimentalmente Paternó y Alvisi *(Gazzetta chimica italiana,* página 74, 1898), descompone algunos fluoruros poniendo en libertad el ácido fluorhídrico que escaparía a la atmósfera.

« Se agita — dice Blarez — gracias a un agitador y se le deja depositar durante un cuarto de hora o más largo tiempo si se desea. La sal de bario ha descompuesto los fluoruros y sulfatos alcalinos. Gracias a la formación de sulfato bárico, cuerpo insoluble y pesado, el fluoruro de bario que quedaría largo tiempo al estado gelatinoso y en suspensión, se deposita al mismo tiempo que el sulfato de bario, es decir, muy rápidamente. »

Se filtra sin esperar a que el líquido sea absolutamente límpido; porque durante mucho tiempo se forma tártrato de bario. Todo el fluor o la mayor parte se encuentran en el depósito formado en un cuarto de hora.

El tiempo para la decantación es muy reducido, pues es un hecho que conocemos los que hemos trabajado en vinos, que, en algunos de éstos, el depósito de sulfato de bario se hace muy lentamente, y si agregamos que el fluoruro de bario formado es, al estado coloidal, difícil de precipitar y que pasa a través de los filtros, se comprenderá que es imprescindible dejar un tiempo mayor que un cuarto de hora de reposo para que el sulfato de bario formado envuelva y arrastre al floururo. Villavecchia-Nicolardot *(Chimie analytique,* t. II, pág. 71) indican 12 horas de reposo y luego filtrar, lo que, prácticamente, es imposible, a menos que se trabaje de día y noche. Otros autores aconsejan 24 horas el tiempo de precipitación, lo que, si bien es cómodo para el operador porque le permite dejar el ensayo de un día para otro, en cambio se encuentra — como lo hemos comprobado — con que se forman gran cantidad de cristales blancos de tártrato de bario, que adhiriendo a las paredes del recipiente pueden aprisionar el fluoruro de bario, de modo que si los dejamos adheridos en el vaso de decantación, se podría perder el fluoruro aprisionado, y si los desprendemos vivamente de las paredes para volcarlos en el filtro donde se reunirían con el precipitado barítico, darían por calcinación carbonatos que con el ácido sulfúrico agregado después, desprenderían anhídrido carbónico, elevarían la temperatura y producirían efervescencia y arrastre hacia la atmósfera del ácido fluorhídrico si lo hubiera.

Por estas razones proponemos como tiempo para el reposo, cuatro horas.

« Una vez que el líquido ha filtrado, se lava una o dos veces con agua para sacar el vino que lo ensucia. Se le hace secar rápidamente y después se le incinera a la mufla o en un pico de Bunsen. Estas dos operaciones se pueden hacer en una cápsula de platino de 5 centímetros de diámetro. »

Aconsejamos lavar el precipitado una sola vez y calcinar el filtro por separado.

« Por otra parte, se toma una placa de vidrio bastante delgada, bien limpia, de más o menos 6 centímetros por 8, se la calienta a la llama y se le recubre de un lado con cera carnauba blanca, o una mezcla de cera carnauba y ceresina blanca, es decir, ceras de puntos de fusión relativamente elevados lo que es ventajoso. »

En cuanto a la calidad de los vidrios está comprobado que no todas las clases de vidrio se dejan grabar con la misma intensidad por iguales proporciones de ácido fluorhídrico, debiendo por eso desecharse el cristal, esto es, los vidrios plumbíferos y los que se dejan atacar fácilmente, o que no resisten a la acción de los reactivos generales, prefiriendo los vidrios comunes, que contienen poco álcali, potasa o soda, muy duros, empleados en las ventanas y que ofrecen por su canto una coloración verde (Blarez).

Los vidrios han de ser delgados y al ensayarse, como si se tratase de la investigación de los fluoruros, han de soportar la acción de los vapores de ácido sulfúrico durante una hora sin que su superficie se modifique.

No obstante, estos vidrios varían mucho en su composición, por consiguiente, no se deben comparar los resultados, salvo que se trate de pruebas efectuadas con vidrio de idéntica composición.

En la investigación efectuada en la oficina química nacional sobre la existencia del fluor normal en los vinos, por primera vez se menciona el uso de los vidrios de las placas fotográficas usadas, de la fábrica Lumière, por su composición uniforme, aspecto homogéneo, coloración verde vista por los cantos, su poco espesor, ser duras y resistentes a la acción de los vapores de ácido sulfúrico y de fácil adquisión por lo abundantes. Además, se da la técnica para su lavado, que consiste en un baño de soda cáustica para desprender la capa de gelatina, luego lavaje abundante en agua, después se sumerge durante 24 horas en una solución saturada de bicromato de potasio con 10 por ciento de ácido sulfúrico para lavarlas, finalmente, con agua en abundancia.

« Después de enfriarla se traza con un punzón a punta tallada en

bicel, algunos caracteres de manera a poner en descubierto el vidrio.»

Preferimos dejar sin cubrir con la cera un pequeño espacio, de una forma característica, lo que es siempre más ventajoso que cubrir toda la placa y hacer trazos con un punzón, no tanto porque así se pueda rayar el vidrio, como porque pudiera quedar engrasada la superficie con lo que se disminuiría la sensibilidad del procedimiento.

« Se agrega un poco de ácido sulfúrico en la cápsula que debe estar bien sujeta a un soporte, se la recubre con la placa de vidrio así preparada, el lado recubierto con cera para abajo. »

Como Blarez no menciona la concentración del ácido sulfúrico, y el decreto del 19 de agosto de 1910 sobre normas oficiales de análisis para la República Argentina dice ácido sulfúrico puro, creemos de nuestro deber recordar que el ácido fluorhídrico completamente anhídrido no ataca al vidrio ni después de varias semanas, grabándolo inmediatamente que se agrega agua (Thorpe, *Química industrial,* edición española, t. III, pág. 507) por lo que encontramos conveniente aconsejar como ya lo hicieron Gautier y Clausmann *(Comptes rendus,* t. CLIV, pág. 1756) que se use ácido sulfúrico con 10 por ciento de su peso de agua destilada, con lo que se consigue mayor intensidad en el grabado y se evita, según Ruff y Braun *(Bulletin Sociéte chimique,* 1914), la formación de fluosulfonato de calcio, que aparecería entre el residuo, ocasionando pérdidas de ácido fluorhídrico.

Con el ácido sulfúrico al 97 por ciento, el rendimiento en ácido fluorhídrico baja.

Con el ácido sulfúrico fumante el fluor es fijado al estado de ácido fluosulfónico.



$$F_2Ca + SO_4H_2 + 2SO_3 = SO_4Ca + 2FSO_3H$$

Resultando casi teórico el rendimiento en ácido fluosulfónico si el ácido sulfúrico usado tiene el 60 por ciento de anhídrido sulfúrico.

Blarez dice que « se asegura la adherencia perfecta, para lo cual se puede interponer entre el vidrio y los bordes del crisol de platino una pequeña redondela de caucho ». Otros autores también aconsejan la arandela de caucho para conseguir la adherencia perfecta, evitando así la pérdida de los vapores de ácido fluorhídrico que se produciría por exceso de presión al elevar la temperatura del crisol.

No hemos podido hacer una prolija verificación sobre el uso del caucho, como la que se necesitaría para aconsejar en pro o en contra; pero recordamos que el ácido fluorhídrico ataca y ablanda a esta substancia licuándola lo que no ocurre con el ácido suficientemente diluído.

« Se puede también travasar las cenizas a una cápsula de plomo de 4 a 5 centímetros de diámetro y a bordes bien netos y se vuelca en seguida el ácido sulfúrico. »

Debe desecharse en absoluto el uso de la cápsula de plomo porque el ácido fluorhídrico lo ataca (Moissan, *Chimie minerale,* t. I, pág. 71), ataque que es enérgico cuanto más concentrado es el ácido (Thorpe, *Química industrial,* edición española, t. III, pág. 509).

« Se calienta muy moderadamente el fondo del crisol de platino que reposa sobre una placa metálica. »

Creemos, como lo aseveran Gautier y Clausmann (*Comptes rendus,* t. CLIV, pág. 1757), que el calentamiento, si bien suave al principio, debe ser elevado hasta 230°, pues aunque el ácido fluorhídrico en condiciones normales hierve a 19°, cuando está mezclado con ácido sulfúrico es retenido por éste, hasta temperaturas mucho mayor que su punto de ebullición.

El punto delicado e importante para hacer que hasta los rastros de ácido fluorhídrico no sean perdidos y vayan a grabar el vidrio en las partes descubiertas es de obtener una buena refrigeración de la placa de vidro. El medio que nosotros utilizamos y que es excelente. consiste en cúbrir la parte de placa de vidrio a enfriar por un verdadero refrigerante a corriente de agua. Este refrigerante consiste en un vaso en *faïence,* llamado pote a pomada, de 60 centímetros cúbicos, cerrado con una lámina de caucho sólidamente ligada por un cordel. Para hacer circular el agua en este refrigerante se ha perforado dos agujeros en el fondo; en uno penetra un tubo que va casi a alcanzar la membrana de caucho: es por este tubo que llega una corriente continua de agua fría; el agua calentada sale por el tubo que penetra en el segundo agujero sólo algunos milímetros.

« Este refrigerante es aplicado sobre placa de vidrio y gracias a la adherencia perfecta de la membrana de caucho, la placa de vidrio es mantenida continuamente fría. »

Además de las razones dadas sobre la conveniencia del enfriamiento a gran corriente de agua fría, está la de que no es posible, el calentamiento a 230° si no se asegura una refrigeración continua y eficaz, lo cual conseguiremos reemplazando el vaso de *faïence* por reci-

piente de cobre, cuyo fondo perfectamente plano permite un contacto íntimo y directo sobre la placa de vidrio sin membrana de caucho, ni hoja de papel, como se ve en el esquema siguiente :

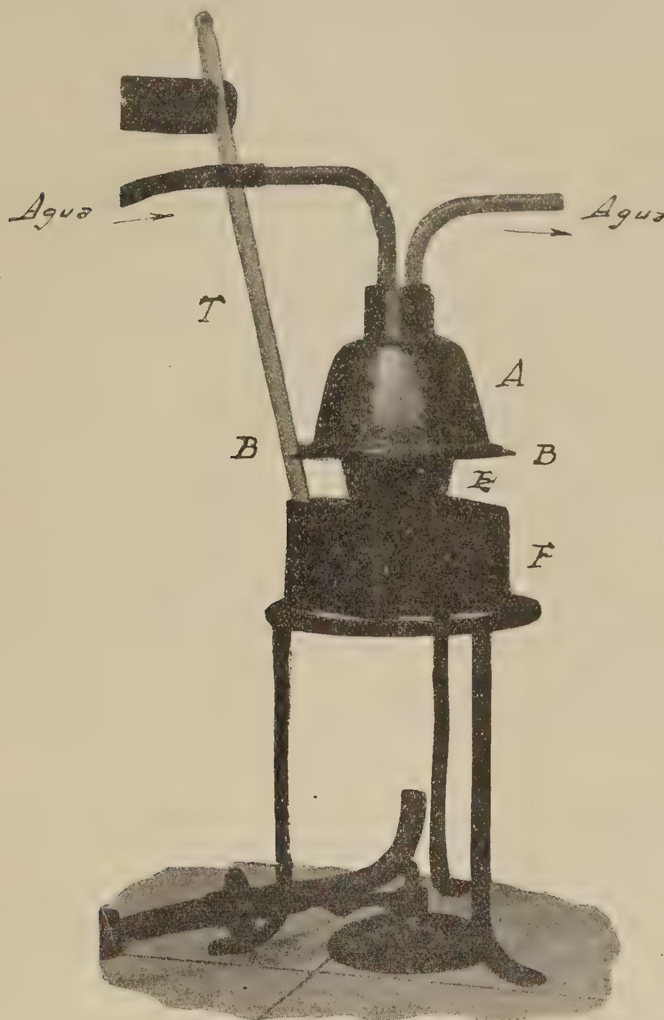


Fig. 1

Aparato refrigerador A, construído en cobre para que sea buen conductor y que por su fondo descansa sobre la placa de vidrio B, la que previamente había sido recubierta en su cara inferior, dejando un pequeño espacio sin cubrir. Todo el dispositivo se coloca sobre el

crisol de platino E, en el cual se ha introducido con anterioridad la mezcla de las sales báricas y unas gotas de ácido sulfúrico con agua; se calienta sobre un baño, F, de limaduras de fierro. Blarez «calienta una hora y muy moderadamente el fondo del crisol» sin determinar a qué temperatura, hecho que por su método es imposible precisar.

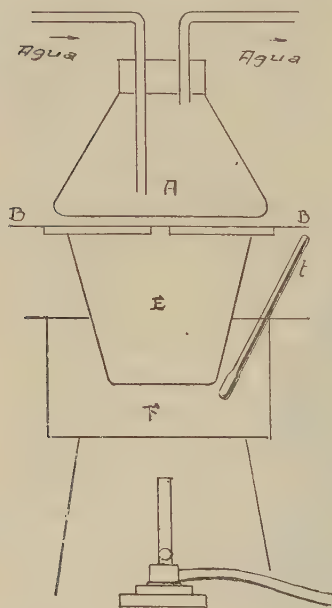


Fig. 2

A nosotros el baño de limaduras de fierro nos permite calentar a 80 grados durante una hora, dejar enfriar y luego llevar la temperatura a 230 grados, la que se mantiene durante una hora. Comprobándose perfectamente por medio de un termómetro, *t*, sumergido en la limadura.

El sistema de refrigeración resulta tan excelente que permite trabajar con temperaturas de 250 grados en el baño de limadura de hierro sin que se funda la cera que recubre al vidrio.

Terminado el calentamiento, Blarez dice que «se desprende la placa, se saca la cera, primero calentándola y chupándola con aserrín de madera; después se quita el resto de la cera frotándola con creta en polvo y alcohol, o bencina o cloroformo».

EXISTENCIA NORMAL DEL FLUOR EN LAS UVAS ESPAÑOLAS

Como disponíamos de un método analítico de resultados tan seguros y sensible, y considerando que el fluor es un elemento normal en los terrenos, en las aguas minerales, en las aguas de los grandes ríos y en las del mar, así como en todos los tejidos animales, en los vegetales arbóreos y herbáceos, y que se admite su existencia en pequeñísimas cantidades en la vid, tanto en los sarmientos y hojas como en el fruto, hemos limitado la cantidad de uvas, para la comprobación de la existencia del fluor normal, a la que corresponde sensiblemente a 100 centímetros cúbicos de vino, que es la cantidad de muestra fijada por Blarez y por el decreto del 14 de mayo de 1917 del gobierno argentino, como suficiente para la determi-

nación del fluor en los vinos, dada la gran sensibilidad del método.

Se han obtenido grabados bien nítidos con cantidades menores de un décimo de miligramo de ácido fluorhídrico en esta oficina química, cifra que coincide con las conclusiones de Blarez, Carles, Gautier y Clausmann, etc. (*Investigación efectuada en la Oficina química nacional,* pág. 31).

a) Experiencias realizadas en España. — Para el mejor logro de mi trabajo comuniqué, con la antelación necesaria, el objeto de mi viaje a España al ingeniero agrónomo Cristóbal Mestre, director de la Estación enológica de Villafranca del Panadés, quien goza de una merecida reputación como elemento de los que bregan por encauzar las modernas corrientes del pujante resurgimiento español; y este técnico, aparte de conseguir de su jefe, el señor ministro de Fomento, el permiso necesario para cederme el laboratorio de la Estación enológica y para colaborar personalmente en la investigación, me dió valiosísimas referencias sobre el cultivo de la vid, terrenos, aguas, razas, épocas de madurez según regiones y razas, elaboraciones de vinos, productos enológicos, métodos de análisis españoles, etc., acompañándome a visitar viñas y bodegas de las regiones del Panadés, Reus, Sitges y Villanoveta.

Además del señor Mestre, ha trabajado con nosotros en la Estación enológica, auxiliándonos en la búsqueda del fluor, el preparador químico don Juan Ribera, y lo ha hecho en forma tal que obliga nuestro reconocimiento.

Los resultados se consignan en el acta que se agrega.

ACTA

En Villafranca del Panadés, a 20 de agosto de 1921, reunidos el doctor don Martiniano Leguizamón Pondal, profesor de química industrial de la Universidad de Buenos Aires y subdirector de Oficinas químicas nacionales, delegado por el gobierno de su país para estudiar en España la existencia del fluor normal en las uvas, y don Cristóbal Mestre, ingeniero agrónomo, director de la Estación enológica de Villafranca del Panadés, autorizado por el ministerio de Fomento para colaborar y facilitar todos los elementos necesarios para dichos estudios, redactan el presente documento explicativo de los trabajos realizados en común que se refieren al citado tema.

El señor Mestre hace notar que este año no se encuentran todavía en esta fecha uvas en completa sazón en el Panadés, y que por consiguiente para proceder a los análisis de las mismas hubiera sido preferible esperar al mes de septiembre, época de la vendimia, ya que en la actualidad sólo se encuentran maduras las de regiones más cálidas como Valencia y Andalucía; pero ante los deseos del señor Leguizamón Pondal de operar con uvas de esta comarca, se resuelve hacerlo escogiendo las variedades más maduras de la viña de experimentación del establecimiento, elevando la cantidad de cada muestra a 300 gramos, reservándose dicho señor el recoger uvas en las restantes regiones de España que piensa visitar.

Se comenzó el trabajo haciendo la discusión de los métodos para investigar el fluor en las uvas. El señor Mestre considera que, siguiendo el método de las Oficinas químicas nacionales, página 33 de la publicación de esa entidad sobre *Investigación del fluor*, cabe la posibilidad de que en la incineración se formen compuestos volátiles del fluor, con silicio, carbono u otros elementos que originen la pérdida de dicho halógeno, a pesar de la adición de la sal de bario que ordinariamente se emplea para fijarlo.

Esta hipótesis concuerda con el hecho experimentado en la Estación enológica, a raíz del regreso del señor Mestre de su viaje a la República Argentina, en 1914, para el estudio del tema análogo sobre los vinos, de que habiendo agregado intencionadamente pequeñas cantidades de fluoruro de amonio a uvas antes de incinerar, no se acusó el grabado sobre el vidrio, si bien hace observar el señor Leguizamón Pondal que el vidrio empleado no era de la misma clase que el utilizado en la Oficina química de su país. Por todo lo cual consideran que debe darse la preferencia a los métodos basados en la separación previa del fluor antes de toda incineración.

A pesar de esto se decidió operar de la siguiente manera :

Se dividió cada lote de uvas en dos partes : una con lavado previo y otra sin él ; cada porción fué exprimida para separar el zumo del orujo. Con los zumos se siguió minuciosamente el método Blarez, unas veces lavando los precipitados y otras veces dejándolos sin lavar. Con los orujos se siguió el método argentino.

Al mismo tiempo se hizo un ensayo en blanco de los reactivos y demás material operatorio tomando las cantidades que para los demás ensayos se emplearon, no acusando el más ligero grabado del vidrio.

Los resultados obtenidos son los siguientes :

Variedades de uva	Procedencia	Gramos de uva	Centímetros cúbicos de zumos	Densidad de los zumos	Orujos	Resultados	Observaciones
Hache	Viña de experimentación de la Estación enológica de Villafranca del Panadés.	300	140	1,048		No grabó el vidrio	Sin lavado previo
Hache		300	160	1,047		Ídem	Con lavado previo
Tempranillo ...		300	160	1,052		Ídem	Sin lavado previo
Tempranillo ...		300	150	1,056		Ídem	Con lavado previo
Aramón		300	160	1,050		Vidrio grabado ligeramente	Sin lavado previo
Aramón		300	170	1,050		Ídem	Con lavado previo
Hache					Se reunieron las cenizas con el precipitado del zumo.	No grabó el vidrio	Sin lavado previo
Hache					Ídem	Ídem	Con lavado previo
Tempranillo ...					Ídem	Ídem	Sin lavado previo
Tempranillo ...					Se trataron las cenizas solas	Ídem	Con lavado previo

En todos los casos se apreciaron los resultados empañando los vidrios con el aliento, y las pruebas positivas sólo fueron perceptibles de este modo.

En consecuencia, habiendo operado con uvas escogidas personalmente, efectuándose los análisis bajo la intervención directa de los que subscriben y resultando atacado el vidrio en algunos de estos ensayos, pueden afirmar haber encontrado fluor normal en uvas de esta localidad.

Para que consten los trabajos realizados, a demanda del señor Leguizamón Pondal para dar fe de sus gestiones en la misión que por el gobierno de su país se le ha confiado, firman este documento, por duplicado, sellándolo luego con el sello de la Estación enológica.

M. Leguizamón Pondal. *Cristóbal Mestre Artigas.*

b) Experiencias realizadas en Buenos Aires con uvas españolas. — Como, además de la zona del Panadés, quedasen otras muchas e importantes comarcas vinícolas en España, que precisamente, por su posición topográfica, se encontraban con las uvas en completa madurez a fines de agosto, tales como Valencia, Alicante y Málaga, a ellas nos dirigimos recogiendo algunas muestras de uvas que, conservadas entre aserrín de corcho y en cámaras frigoríficas, han podido ser transportadas hasta Buenos Aires, donde, secundados eficazmente por el químico Carlos Guerrero Estrella — a quien me complazco en reconocer y agradecer su gentil colaboración, — llevamos a cabo la tarea en la forma siguiente:

Obtención de los vinos;

Separación de los orujos;

Ensayos sobre los vinos;

Ensayos sobre los orujos.

Retiradas las uvas de los cajones que las contenían, se las desembarazó de los restos de corcho y papeles que tenían en parte adheridas, luego fueron estrujadas convenientemente e introducidas en vasos rotulados, donde se produjo el proceso de la fermentación.

Como algunos racimos presentaban aspecto de pasas por evaporación de parte del agua, se les calculó la cantidad perdida y se les agregó dentro de los vasos de fermentacion con objeto de facilitarla.

Terminada la fermentación, se filtraron los vinos, primero por una placa de Büchner, que separó la mayor parte de los orujos, y finalmente por algodón, quedando con un aspecto bastante límpido.

Las partes sólidas, conjuntamente con el algodón, se introdujeron en una cápsula de porcelana con 100 centímetros cúbicos de una solución de carbonato sódico al 3 por ciento durante 24 horas, luego se evaporó a sequedad y se calcinó al rojo sombra hasta la desaparición del carbón.

Las cenizas así obtenidas fueron pasadas a un crisol de platino, en que se sometieron a la acción del ácido sulfúrico con objeto de ensayar el grabado del vidrio.

Con los vinos obtenidos se siguió rigurosamente el procedimiento Blarez, con las modificaciones que hemos aconsejado, obteniéndose los resultados siguientes :

Nº de orden	Variedad de uva	Producto	Propietario	Provincia	Localidad	Fluor
1	Moscatel blanca	Vino	J. F. de Artigas	Barcelona	Villanoveta	Negativo
2	—	Orujos	—	—	—	—
3	Palomino blanca	Vino	—	—	—	—
4	—	Orujos	—	—	—	—
5	Sumoy tinta	Vino	—	—	—	—
6	—	Orujos	—	—	—	—
7	Xarel-lo blanca	Vino	—	—	—	—
8	—	Orujos	—	—	—	—
9	San Juan blanca	Vino	—	—	—	—
10	—	Orujos	—	—	—	—
11	Xarel-lo blanca	Vino	Bosch, Güell y Cia	—	Panadés	—
12	—	Orujos	—	—	—	—
13	Sumoy tinta	Vino	—	—	—	—
14	—	Orujos	—	—	—	—
15	Tempranillo tinta	Vino	—	—	—	—
16	—	Orujos	—	—	—	—
17	Xarel-lo blanca	Vino	Mayner, Plá y Sugrañes	Tarragona	Reus	—
18	—	Orujos	—	—	—	—
19	Moscatel blanca	Vino	—	—	—	—
20	—	Orujos	—	—	—	—
21	Sumoy tinta	Vino	—	—	—	—
22	—	Orujos	—	—	—	—
23	Moscatel blanca	Vino	Manuel García	Valencia	Valencia	Débilmente positivo
24	—	Orujos	—	—	—	Negativo
25	Valencí blanca	Vino	Pedro Guzmán	—	Alicante	—
26	—	Orujos	—	—	—	—
27	Valencí tinta	Vino	—	—	—	—
28	—	Orujos	—	—	—	—
29	Moscatel rosada	Vino	José Pastor	Málaga	Málaga	—
30	—	Orujos	—	—	—	—
31	Moscatel blanca	Vino	—	—	—	—
32	—	Orujos	—	—	—	—

c) Escalas de comparación. — Con el objeto de verificar una vez más la sensibilidad del método, y para tener una serie que nos sirviera de comparación en el caso de que en los ensayos obtuviéramos resultados positivos, establecimos una escala operando en cada vez sobre 200 centímetros cúbicos de vino mendocino, al que le agregamos áci-

do fluorhídrico al estado de fluoruro de amonio en las siguientes cantidades:

200 centímetros cúbicos de vino, más 1 miligramo de HP, dió francamente positivo.

200 centímetros cúbicos de vino, más 0,5 miligramo de HP, dió francamente positivo.

200 centímetros cúbicos de vino, más 0,1 miligramo de HP, dió francamente positivo.

Ensayo en blanco: francamente negativo.

CONCLUSIONES

1ª La investigación del fluor en los vinos debe hacerse por el método Blarez y las modificaciones que proponemos, con lo cual se consigue mayor uniformidad y sensibilidad en los resultados;

2ª Habiendo operado con uvas recogidas personalmente, y resultando grabados los vidrios de dos ensayos efectuados en España y de uno de los practicados en ésta, podemos afirmar la presencia del fluor normal en uvas españolas;

3ª Los grabados de los vidrios sólo son visibles con el auxilio del aliento. Por lo que, considerando la extrema sensibilidad de la reacción, los podemos conceptuar como de *ligeros vestigios.*

DOCTOR ÁNGEL GALLARDO

La Sociedad Científica Argentina, en colaboración con el Latium y otras corporaciones culturales, quiso manifestar oficialmente a su distinguido ex presidente doctor Ángel Gallardo, su complacencia por el honor que los poderes públicos de la Nación le otorgaron designándole, con general aplauso, Ministro plenipotenciario de la Argentina en Italia, y darle la despedida afectuosa que se merecía como hombre de ciencia y como socio.

Al efecto, resuelto darle un banquete, este tuvo lugar en el Salón Augusteo, con brillante resultado, así por el número de comensales como por lo representativo de los mismos, y con una nota muy simpática, por cierto : el concurso de numerosos caballeros italianos que quisieron manifestar su honda simpatía y aprecio al distinguido argentino a quien se confiaban las buenas relaciones, no sólo diplomáticas sino que también culturales, de la joven Argentina con la renacida península itálica estrechamente vinculadas, tanto por su afinidad étnica cuanto por las comunes aspiraciones de libertad y progreso, merced al trabajo y al estudio.

Causas justificadas, que creemos innecesario expresar aquí, han hecho postergar la publicación de este homenaje en nuestra revista ; pero, aunque con un poco de retardo, hemos creído lógico hacerlo hoy, para constancia de que nuestra asociación cumplió gustosa con su deber de compañerismo respecto de su distinguido consocio.

Sin entrar en el detalle del banquete, que fué digno del personaje agasajado, diremos simplemente que al descorcharse el champaña, ofreció la fiesta al doctor Gallardo nuestro consocio ingeniero Nicolás Besio Moreno, presidente del Centro cultural Latium, en un discurso muy bello y muy aplaudido, así por su forma como por su fondo, que lamentamos no poder publicar.

Luego, en nombre de la Sociedad Científica Argentina, su presidente, ingeniero Santiago E. Barabino, leyó el siguiente discurso :

Doctor Gallardo,
Señores :

Las atribuciones de mi cargo en la Sociedad Científica Argentina me imponen la misión — grata por cierto — de saludar y felicitar,

en este acto, al distinguido consocio y amigo, doctor ingeniero Ángel Gallardo, a quien festejamos esta noche con motivo de su reciente nombramiento diplomático.

Recibid, pues, doctor Gallardo, ante todo, los plácemes de la Junta directiva de nuestra institución y luego los míos propios, como amigo vuestro, por el alto cargo con que acaban de investiros los poderes públicos de la Nación, el de ministro plenipotenciario argentino ante el gobierno de Italia, el hermosísimo jardín de Europa, del que hace casi un siglo brota para nosotros una caudalosa fuente de arte, ciencia, industria y trabajo, que con su benéfico riego ha contribuído en forma superlativa a hacer fructificar las mentes y las tierras de nuestra joven nación, mediante sus sabios maestros, sus hábiles profesionales, sus geniales artistas, sus prácticos artesanos y sus honestos y laboriosos braceros.

Por lo que respecta a la Sociedad Científica Argentina, que habéis presidido con tanto acierto como brillo, se siente feliz de que uno de sus más conspicuos miembros haya sido designado representante de nuestro país en aquella nación « fenix », tan vinculada a la nuestra, no sólo por la honra que el elevado cargo os prodiga, sino que también porque seréis el docto representante de nuestra asociación ante los centros culturales italianos.

Por esto la Junta directiva de la Sociedad Científica Argentina, a su vez, os ha investido con el cargo de su delegado ante las asociaciones científicas de la península, segurísima de que conseguiréis, con vuestra acción competente, vincularlas cada vez más con la nuestra, en cuyo sentido contaremos también con el apoyo del Latium creado con igual misión.

En cuanto a vuestra labor científica creo excusado describirla ante los que en este grato momento os agasajamos; pero ello no obsta para que recuerde que fuisteis un estudiante distinguido en vuestro bachillerato, como pude comprobarlo personalmente siendo yo profesor del Colegio nacional central, durante el clásico rectorado del doctor Amancio Alcorta; lo fuisteis también en los cursos universitarios hasta graduaros de ingeniero civil; y tal os conservasteis al abandonar las ciencias de la construcción por las disciplinas que os condujeron al doctorado en ciencias naturales de mayor predilección para vos, en cuya aplicación práctica debíais bien pronto adquirir renombre, fuera y dentro del país.

Por una extraña coincidencia, que podía haberos acobardado si la conciencia de vuestro valer no os sostuviera, ocupasteis la clase de

zoología en la Facultad de ciencias matemáticas, físicas y naturales, en substitución del reputado naturalista doctor Carlos Berg, a raíz de su fallecimiento en 1902, y, más tarde, el cargo de director de nuestro Museo nacional de historia natural, por fallecimiento del sabio doctor Florentino Ameghino, en 1911.

Fuisteis profesor también de ciencias naturales en la Facultad de ciencias médicas y en el Colegio nacional; habéis dirigido la enseñanza agrícola en el Ministerio de agricultura; y, por último, acabáis de abandonar por vuestro nuevo cargo la presidencia del Consejo nacional de educación, donde por varios años habéis ejercido una elevada misión, demostrando una dedicación constante, bien intencionada y patriótica, y un consciente criterio de las necesidades docentes y administrativas de la enseñanza primaria en nuestro país, así como de vuestra responsabilidad moral en el cargo que habéis desempeñado.

No debo entrar a juzgar vuestra acción como naturalista. No sabría hacerlo; pero conozco la opinión de vuestros más destacados colegas entre nosotros, que reconocen el mérito de vuestros trabajos sobre biología, zoología y botánica, a los que supisteis aplicar el razonamiento matemático. Os dió nombradía vuestra particular interpretación de las figuras cariocinéticas, que, con aplauso general, han llegado a constituir vuestra teoría electrocoidal de la cariocinesis, teoría sobre división celular que expusisteis en la alta cátedra de la Sorbona, en París, con aprobación tal que os mereció ser nombrado « profesor agregado » de la misma.

Paso por alto vuestros interesantes estudios sobre teratología vegetal, esto es, sobre las monstruosidades de algunos vegetales; así como de vuestras investigaciones sobre la herencia biológica. Tampoco haré sino mención de vuestros estudios interesantísimos sobre las hormigas de nuestro país; sólo mencionaré los que habéis hecho del delfín capturado en Mar del Plata, y de la « flora argentina », porque sería larga tarea e inoportuna en este momento. Basta decir, para justificar mi aserto, que tengo anotadas más de cincuenta publicaciones vuestras, doctor Gallardo, sin contar el texto de zoología, tan favorablemente juzgado.

Por lo que a la Sociedad Científica Argentina corresponde, me es muy grato recordar vuestra acción presidencial en la misma, cuya eficiencia fué marcadísima. Bastará mencionar que habéis iniciado en 1898 bajo sus auspicios, el *Primer congreso científico latinoamericano* en Buenos Aires, en el que tuve el placer de ser uno de vuestros

decididos colaboradores, y que dió vida a otros cinco congresos latinoamericanos, si bien intromisiones extrañas pretendieron borrar su origen trasformándolos en panamericanos.

Recuerdo que nuestra institución os nombró delegado al IV Congreso científico latinoamericano en Chile (por antonomasia 1° panamericano) y fuisteis entonces nombrado miembro honorario de la Universidad de Santiago. Pero creo que no debo seguir poniendo a prueba vuestra circunspecta modestia, doctor Gallardo.

Agregaré, para terminar, que podríamos lamentar vuestro alejamiento del país para ocupar un puesto elevado en la diplomacia, porque os desvía, siquiera sea temporariamente, de las tareas científicas; pero tenemos fe en que esta misión en Italia os dejará tiempo para continuar vuestros estudios e investigaciones.

Esto, en representación de la Sociedad Científica Argentina. Voy a permitirme agregar dos palabras como miembro del Latium y como amigo.

Os han confiado, doctor Gallardo, una patriótica y simpática misión, por lo útil y humana : la de intensificar las relaciones internacionales entre Argentina e Italia; tarea que os será fácil, porque reina ya entre ambas una estrecha vinculacion moral y material que nada podrá desligar, como habréis notado, vos que habéis recorrido las grandes llanuras de nuestro país, los serpeantes valles de sus regiones orográficas, las márgenes de sus ríos; pues, doquiera haya llegado el hombre, debéis haber escuchado los himnos de fraternidad ítaloargentina, himnos de acariciadora melodía o de elevada armonía, que os habrán hecho recordar los que habéis escuchado en Italia, haciendoos dudar de la región geográfica en que os hallábais, por su semejanza con la tierra a donde vais.

Y bien, ella es obra de los hijos del

... bel paese
Che Appenin parte, il mar circonda e l'Alpe

según la gráfica expresión del grande poeta Petrarca, que emigraron y aún emigran a nuestro país, para quienes Argentina es el verdadero « Eldorado », porque son laboriosos y juiciosamente económicos.

Doquiera se dirija la vista, se aplique el oído, se observan las carecterísticas escenas del país amigo, se escuchan sus sentimentales melodías populares, la verbosa y ágil palabra del pueblo latino por excelencia, que si recuerda con lógico cariño la lejana tierra de su nacimiento, quiere también, por su admirable asimilación étnica, al

país que los ampara con sus leyes generosas, con sus fértiles tierras, con la simpatía de sus hijos.

Esto ha creado tal cúmulo de intereses morales y materiales que os facilitarán, doctor Gallardo, vuestra tarea oficial. Por lo demás, difícil es — aunque los políticos suelen errar — que se condense en el cielo límpido de nuestras relaciones alguna tenue nubecilla; pero si ella se produjera sabríais hacerla esfumar en la nada del olvido, pues, aunque por vez primera vais a actuar en la diplomacia, os sobran talento y patriotismo.

Contais además, doctor Gallardo, con otra fuerza moral muy apreciable, entiendo decir, la consideración personal y colectiva de vuestros compatriotas, que hemos recibido con verdadera complacencia vuestra designación para representarnos ante el gobierno y el pueblo italianos, y, entre ellos, muy especialmente de los que por descendencia itálica formamos parte del Latium, los que colaboraremos con vos, de cerca o de lejos, para que sean cada vez más estrechas las relaciones del pueblo que nos proporcionara dos de sus hijos, Cristóbal Colón y Américo Vespucci, para descubrir y dar nombre al grande continente en que hemos nacido nosotros; nos enviara sus intelectuales para contribuir a extender e intensificar nuestra cultura; nos facilitara sus hombres de labor, para que roturaran y regaran con el sudor de sus frentes las vírgenes tierras argentinas y arrancaran pacientes a la savia fecundante su valor esencial, base de nuestra economía nacional; de ese pueblo que cuando quisimos independizarnos, defender nuestra integridad, nuestro honor nacional, estirpar la esterilizadora zizaña de la tiranía, nos dió muchos de sus heroicos hijos que derramaron su sangre generosa en defensa nuestra.

Sí, doctor Gallardo, seremos vuestros colaboradores, porque creemos sinceramente que es una noble tarea que nos impone nuestra condición de descendientes de esa generosa y útil estirpe, con todas sus virtudes y defectos: y no digo raza porque opino que se está abusando de este vocablo. Nuestra raza es una, la latina, y ella abarca en un abrazo fraternal — salvo detalles — a Italia, Francia, España, Portugal, la América latina, etc.

Las diferencias de detalle sólo dan lugar a «familias», no a nuevas razas; así, pues, las denominaciones de raza francesa, española o italiana, constituyen una verdadera incongruencia.

Disculpadme, doctor Gallardo, estas pequeñas divagaciones etnológicas que sólo tienen por causa el anhelo que nos condujo a fundar el Latium, es decir, propender al más estrecho acercamiento del Plata

y el Tíber, mediante el intercambio cultural en sus manifestaciones más amplias, comerciales, científicas, artísticas, industriales, etc.

Señores:

Levantemos la copa para brindar por la salud del doctor Gallardo y por el más feliz éxito de su doble misión en Italia, de transcendental política y de elevada cultura.

APÉNDICE

Por creerlo oportuno, como justificación de lo dicho en su peroración por nuestro presidente, ingeniero Barabino, damos a continuación una nómina de los principales trabajos publicados por el doctor Gallardo:

Trabajos publicados en los « Anales de la Sociedad Científica Argentina »

Fecundación de las casuarináceas.

Nomenclatura de las posiciones y direcciones en los cuerpos animales.

Proyecto de instalación para una fábrica de cal común.

Flores e insectos.

La carioquinesis.

Semillas y frutas.

Significado dinámico de las figuras cariocinéticas y celulares.

La reforma universitaria.

El « Neomylodon Listai ».

Los nuevos estudios sobre la fecundación de las fanerógamas.

Informe del delegado de la Sociedad Científica Argentina en los festejos que con motivo de la exposición celebró la Sociedad de ingenieros civiles de Francia.

Congresos científicos de París, comunicaciones del delegado.

Las matemáticas y la biología, comunicación presentada al congreso de los matemáticos, París, 1900.

Concordancia entre los polígonos empíricos de variación y las correspondientes curvas teóricas.

El doctor Carlos Berg. Apuntes biográficos.

Bibliografía del doctor Carlos Berg. 1873-1901.

Essai de flore raisonnée de la Terre du Feu par Nicolas Alboff. Reseña bibliográfica.

Plan de estudio de historia natural.

Importancia del estudio de las soluciones coloidales.

Observaciones sobre la metamorfosis de « Morpho catenarius (Perry) » en los alrededores de Buenos Aires.

Invernada de las orugas de « Morpho catenarius (Perry) ».

La lucha científica contra las plagas.

Principios de clasificación.

Recientes contribuciones matemáticas al estudio de las leyes de la herencia biológica.

Progresos y tendencias actuales de la teratología vegetal.

Bibliografías.

Trabajos publicados en los « Anales del Museo nacional de historia natural de Buenos Aires »

El delfín Lagenorhinchus, Fitzroyi (Waterhouse) Flower capturado en Mar del Plata, 26 de diciembre de 1912.

Notas sobre la anatomía del aparato espiracular, laringe y hioides de dos delfines : « Phocaena dioptrica Laille » y « Lagenorhynchus Fitzroyi (Waterhouse) Flower » (28 de noviembre de 1913).

El nuevo edificio del Museo de historia natural.

Observaciones sobre algunas hormigas de la República Argentina.

Las hormigas de la República Argentina : subfamilia Dolicoderinas.

Essai d'interprétation des figures karyocinètiques.

Algunos casos de teratología vegetal. Fascinación, proliferación y sinantía.

Carlos Berg. Reseña biográfica.

Observaciones morfológicas y estadísticas sobre algunas anomalías de « Digitalis purpurea L. »

La riqueza de la flora argentina.

Notas de teratología vegetal.

Maíz clorántico.

L'interprétation bipolaire de la division karyocinètique.

Notable mimetismo de la oruga del « Esfingido Dilophonota Lassauxi (Boisduval) » Berg.

La subfamilia ponerinas. (Las hormigas de la República Argentina.)

Trabajos publicados en la revista « Physis »

Visita a la estación biológica de Roscoff.

Observaciones sobre una hormiga invasora.

Dos palabras más acerca de la hormiga invasora.

Hormigas dolicoderinas de los Andes de Mendoza.

Fauna mirmecológica del Tandil y la Ventana.

El mirmecófilo sinfilo « Fustiger elegans Raffray ».

Conferencias del doctor Gallardo.

Palabras del doctor Gallardo.

Una nueva Prodorilina « Acanthostichus Affictus ».

Hormigas del Neuquen y Río Negro.

Y como publicación especial, de carácter didáctico, un excelente texto de zoología.

LOS INDIOS LENGUAS

SUS COSTUMBRES Y SU IDIOMA

CON COMPENDIO DE GRAMÁTICA Y VOCABULARIO

Por ALFREDO CORYN

He reunido poco a poco las notas que sirvieron de base a este ensayo cuando, entre los años 1888 y 1916, habitaba el Gran Chaco y estaba en contacto diario con los indios llamados Lenguas.

Al publicar estas páginas, escritas sin ninguna pretensión científica ni literaria, no tengo otra intención que la de hacer accesible a las personas que pueden tener interés en ellas, mis observaciones personales.

I

SU NOMBRE, SU ORIGEN, NOTAS ETNOGRÁFICAS

Entre todos los indios que pueblan el Gran Chaco septentrional los más dignos de estudio son los que pertenecen a la raza Lengua. De dónde proviene su nombre, que es indiscutiblemente castellano, no lo he podido averiguar. Entre ellos, los Lenguas se llaman *entzlitz:* hombres, gente.

En algunos mapas y crónicas antiguas se les llama indios Orejones; esa denominación, en el presente, no se aplica a ninguna tribu del Chaco. Es de suponer que los conquistadores dieron ese nombre a los Lenguas y tribus parientes, pues tienen éstos la costumbre de perforar los lóbulos de sus orejas para introducir en ellos cilindros de madera, agrandándolos poco a poco hasta que, corrien-

do los años, alcancen un diámetro de 4 a 5 centímetros, lo que da dimensiones enormes a las orejas, y forma verdaderos *orejones*. Quizá fué esa costumbre el origen del nombre Orejón. Pero todo eso está bien lejos de explicar el nombre Lengua.

La raza de los Lenguas se divide en varias tribus que son: los Mascois, los Angaïtés, los Sanapanahs; todos hablan el mismo idioma, aunque con notables diferencias de pronunciación, como lo veremos más adelante.

El territorio que habitan se extiende, en el Chaco, desde frente a Villa del Rosario del Paraguay, más o menos, hasta frente a la desembocadura del Apay desde las orillas del río Paraguay hasta unas treinta leguas, aproximadamente, de este a oeste. Ese territorio se puede calcular, por consiguiente, en unos 30.000 kilómetros cuadrados, o sea la superficie del reino de Bélgica.

¿ De dónde vinieron los Lenguas ? Esa pregunta quedará también muy probablemente sin contestación, a pesar de que ellos conserven todavía una tradición, según la cual vinieron del lejano norte, y presenciaron el cataclismo cuando surgió la cordillera de los Andes. Pero, ¿ qué fe merecen las leyendas ?

Los Lenguas tienen carácter muy pacífico y son poco temibles, aunque no pierden ocasión para comer carne ajena cuando pueden, sin exponerse a ser pillados *in flagranti delicti*.

Como trabajadores poco valen. No están acostumbrados a trabajar, puesto que forzados por la naturaleza del territorio que ocupan, impropio para la agricultura, deben « nomadizar » en busca de caza y de pesca o de árboles frutales en producción.

Cuando se alistan en algún establecimiento industrial o rural, nunca perduran por mucho tiempo y nunca trabajan con gusto. Si no están dirigidos por algún extranjero que sepa manejarlos, se encontrará siempre, por un indio que está trabajando, cuatro o cinco que están contemplando atentamente a aquél, o descansando de fatigas imaginarias, o afilando despacio, pero prolijamente y con mucho esmero, su hacha o su machete. Todos los pretextos para no trabajar son buenos.

Cuando jóvenes, los Lenguas son, en general, muy bien formados, robustos y de buenas carnes, sin ser nunca obesos. Envejecen sin canas, pero, en cambio, enflaquecen con los años, gradualmente, hasta adquirir la apariencia de una momia.

Entre las mujeres, en la primera juventud, se encuentran muchachas bien formadas y no feas. Pero no pasan de la *beauté du diable*.

En cuanto a las viejas, ellas son horriblemente feas. Su cutis es tan arrugado y colgante que hace recordar los odres vacíos.

El tipo de los Lenguas es francamente mongólico: juanetes salientes, ojos oblicuos, nariz generalmente chata, labios bastante gruesos. Los indios de las tribus de los Sanapanahs, difieren de los Lenguas por la forma aguileña de la nariz, y la cabeza algo más ovalada.

El color del cutis de todos ellos es pardo claro, cobrizo, pero es de suponer que no estando expuesto a la acción continua del sol, su color palidecería notablemente. A lo menos las partes del cuerpo cubiertas por los vestidos son mucho más claras que las constantemente quemadas por los rayos solares.

Una particularidad que llama la atención es que los Lenguas, casi sin excepción, tienen la voz grave y retumbante. Son barítonos y bajos. No me acuerdo haber sentido entre ellos una sola voz de tenor. ¿No será debido esto a la influencia de su idioma gutural, la que, a la larga, a través de innumerables generaciones, formó el metal de su voz?

Los Lenguas hablan su idioma lentamente y en voz baja, y cuando están en familia se ríen poco. Saben hablar de las cosas más frívolas con una seriedad que no deja de ser cómica.

En cuanto a la talla de los hombres es mediana. Muy pocos alcanzan a tener más de 1m75, y su altura difiere mucho entre ellos. Las mujeres son, en proporción, más bajas que las europeas.

II

SU VESTIMENTA Y ADORNOS

Ambos sexos llevan el cabello cortado *à la bretonne,* con la sola diferencia de que el sexo fuerte usa un topete que cuelga en el medio de la frente, y está liado, como pincel, con hilo encarnado y adornado con unas plumitas blancas.

El vestido de los hombres consiste en una pesada manta de lana de fabricación casera. Las mantas de esa clase son muy gruesas, el hilo fuertemente torcido, pero el tejido flojo. Un cinto tejido o de cuero, o bien una bolsita de punto de red llamado *ayin,* sujeta la manta en la cintura; cuando hace frío, el indio alza la parte superior de ella sobre el busto desnudo.

Las mujeres visten enaguas de pieles de venadillo muy ablandadas por prolíficas sobas y engrasados. Las enaguas están sujetas en

la cintura por una tirilla de cuero. El busto queda siempre enteramente desnudo.

Cuando los Lenguas se aproximan a los puertos del litoral, a donde los hombres van a trabajar, ambos sexos llevan ropa que se da en pago, y el uso del jabón empieza a esparcirse entre ellos, por lo menos para el lavado de la ropa.

Como se ve, la *toilette* de los Lenguas no ocasiona muchos gastos, ni es de mucho estorbo.

III

GOBIERNO. RELIGIÓN. KILYIKHAMA

Contrariamente a lo que se cree, los caciques de los indios del Chaco no llevan ninguna seña exterior, ningún emblema de su dignidad. Al contrario, son los caciques quienes, probablemente imbuídos de su superioridad, menos cuidan de su apariencia, y visten los harapos más antiestéticos.

El gobierno de los Lenguas es *sui generis*. Las tribus no son más que familias que viven en comunidad. Los hombres que forman parte de ellas elijen un jefe, que el uso castellano ha dado en llamar cacique, bien que esta palabra no debería aplicarse sino a los antiguos príncipes mexicanos. Los Lenguas llaman a su jefe *oweskyé*. Sucede a menudo que el miembro más inteligente de la tribu, es decir, el más astuto, el que es más apto para dirigir la opinión pública y proveer su horda más ampliamente con la manutención necesaria, imponga su autoridad poco a poco y suplante paulatinamente al cacique electivo, quien, tácitamente, le cede el paso, y el cetro. En otra parte se llamaría a esto golpe de estado. Pero entre los Lenguas es cosa tan natural que ni se habla de ello.

La forma del gobierno indefinible es un híbrido producto de la unión del comunismo con el absolutismo.

El *oweskyé* es obedecido incondicionalmente; casi nunca consulta a sus administrados. Pero a pesar de su poder absoluto, dictatorial, ese jefe no toma medidas que sean del desagrado de la mayoría de sus súbditos. Se guía por conversaciones oídas, haciéndose el sordo. Esos hijos de la Naturaleza son mucho más diplomáticos de lo que podríamos sospechar.

Es sabido que los teólogos de todas las sectas cristianas sostienen la teoría de que todos los pueblos del mundo reconocen y adoran

a alguna divinidad, y que el concepto de ella existe, en germen, en el alma de todos los hombres, incluso las hordas más salvajes. Sería un poderoso argumento para deducir de esas premisas, si fueran fundadas, la conclusión siguiente: « el concepto de la divinidad vive innato en todos los hombres; luego responde a la verdad », conclusión que, aunque sofística, podría convencer a cerebros poco críticos.

Pero, en realidad, muchas naciones primitivas no tienen el más lejano concepto de una divinidad. Ejemplo de ello lo daban los Guaraníes, y lo dan todavía los Caainguas, los Suhins, los Tuzlis, los Sanapanahs, los Angaïtés, los Mascois y los Lenguas. Afirmo sólo lo que sé positivamente por observaciones propias hechas durante muchos años. Es indudable que se podría ampliar considerablemente esa lista de pueblos ateos.

Los Lenguas, pues, no tienen ninguna idea de divinidad alguna, y no rinden culto a ninguna. En cambio, tienen un miedo loco a los fantasmas. Creen que después de muerta la gente anda de noche, invisible, y se divierte en hacer mil diabluras a los sobrevivientes, tal como robar sus arcos y flechas, sus mantas, derramar el agua de las cantarillas, apagar el fuego (cosa muy seria, luego veremos por qué) y administrar palizas a diestra y siniestra. Así es que cuando muere uno de los suyos, toda la toldería se manda mudar, con armas y bagajes, a varias leguas de distancia de la « casa mortuoria » para que el difunto pierda el rastro!

Solamente después de largo lapso de tiempo, cuando la *kilyikhama*, el fantasma, cansado de esperar y sintiendo no poderse entregar más a esas inocentes bromitas, se duerme para siempre, entonces la tribu se arriesga a volver a aproximarse al sitio abandonado.

La *kilyikhama* es la sola creencia de cosas sobrenaturales de los Lenguas, aparte de algunas supersticiones como de no tocar huesos de un caballo muerto porque trae desgracia, o no beber leche de vaca porque enferma a la familia del que la tome!

Volveremos a encontrar la *kilyikhama* más adelante.

IV

EL MATRIMONIO. LA PSIQUIS INDIA

« Después del gobierno y de la religión, la institución más importante de la sociedad humana es el matrimonio. » No recuerdo quién

lo ha dicho. Pero en la sociedad Lengua los vínculos « indisolubles » del matrimonio dan poco que pensar, y son tratados con poca ceremonia.

¿ Una pareja resuelve casarse, con o sin amor recíproco, por conveniencia o para seguir meramente la antigua costumbre? Pues bien, esa pareja se junta sin más trámites, y... está consumado el matrimonio.

Si, al año, la pareja desea separarse, se separa y asunto concluído. Existe un hijo; y éste sirve de estorbo a los ex cónyugues, dificultando el desarrollo de los planes que formaron. ¿ Qué hacer ? Nada más sencillo : se elimina a la criatura, y ningún recuerdo viviente de la felicidad pasada podrá en adelante turbar la dicha actual o futura de los ex padres.

Esa forma de matrimonio — que se podría llamar matrimonio por tiempo indeterminado — no es, en el fondo, otra cosa que una modificación de la poligamia; es mucho más barata y, sobre todo, salva las apariencias para los de afuera, pues se puede decir : tengo una mujer sola.

Entre los Lenguas, contrariamente a los preceptos de las Escrituras sagradas, es el hombre quien sigue a la mujer. Cuando un hombre de la tribu A se casa con una mujer de la tribu B, en lugar de llevársela a su casa, la sigue, y va a vivir en la tribu B con su mujer.

Varios neófitos de la misión inglesa establecida en el territorio de los Lenguas han sido casados en debida forma, civil y religiosa, por el ministro protestante, que es al mismo tiempo el encargado del registro del estado civil de la misión. Pero a pesar de esta doble sanción, el barniz aplicado resulta tan superficial que no llega a cubrir los repliegues de lo que, *hipotéticamente,* llaman el alma del indio, el que, no haciendo caso a los sacrosantos sacramentos de la Iglesia, se desliga y se vuelve a ligar a la moda del país, sin llegar a tener la mínima noción de lo impropio de su proceder.

No hay que hacerse ilusiones : los resultados obtenidos por los misioneros en su penosa labor y a pesar de una perseverancia que abraza el lapso de una generación entera, son de orden puramente material. Produjo la misión varios carpinteros que trabajan muy bien, y hemos visto a jóvenes Lenguas que, enseñados por maquinistas europeos en los talleres establecidos en las empresas industriales, conducían motores, locomotoras y otras máquinas, y estaban al nivel de cualquier otro trabajador; pero en lo moral, el éxito es mucho menos favorable, y hasta podría parecer que la civilización y el desarrollo de la inteligencia consiguiente, operen solamente sobre las calida-

des negativas del indio, aumentando y refinando sus inclinaciones naturales al vicio.

Es digna de admiración la influencia de la educación casuística de los misioneros en general sobre la astucia innata de las razas primitivas. El rastro del jesuíta — tomo al jesuíta como prototipo del misionero — se puede seguir a la vista. La controversia religiosa queda estampada en el modo de pensar del alumno y le comunica una singular agudez de raciocinio que naturalmente le lleva a conclusiones... absurdas y sofísticas. Un ejemplo concreto explicará con más precisión el proceso realizado en su espíritu.

Un día tenía a cuatro indios, de aquellos neófitos, descargando una jangada de leña. Era un día de verano muy sereno, a las tres de la tarde. De repente dejaron el trabajo, se sentaron al lado del fogón y encendieron su *tzlapup* (pipa).

Entonces les pregunté por qué no seguían trabajando. El cabecilla me contestó, interrogándome si quería que mis «muchachos» trabajasen de noche.

— ¿No ves donde está el sol? le contesté.

— Sí, es cierto patrón, pero al lado está la luna, y la luna es el astro de la noche.

Efectivamente, se veía la luna en el cénit, como suele verse cuando está muy despejada la atmósfera.

Eso de «astro de la noche» lo habían aprendido de los ingleses, y esa deducción paradojal me dió un acceso de risa tan insofrenable, que los indios, que tienen un miedo cerval a los locos, pensando que me había enloquecido, se fueron corriendo y no volvieron a aparecer por tres días.

Hemos, a menudo, debatido con personas conocedoras del carácter de los indios del Chaco, sus cualidades psíquicas, pero nunca hemos podido llegar a resolver el problema de si, por ejemplo, son capaces de gratitud desinteresada y de afección sincera. Es verdad que son muy amigos de las personas que les tratan bien, y ellos no las engañarán ni les harán daño hasta que no entre su estómago en línea de combate. Pero desde el momento que el indio tenga hambre, se comerá los cerdos del patrón que mejor le haya tratado durante años, si puede hacerlo sin exponerse a ser descubierto, y robará a su propio padre su oveja y al mismo hermano su cabra o su vaca.

Ese rasgo de carácter es común a todas las razas primitivas que tienen que luchar con condiciones de existencia críticas.

«Es la tierra, el país que modela el alma del habitante», y cierta-

mente la dificultad de encontrar en el Chaco víveres en suficiente cantidad para no sufrir hambre, es uno de los factores más importantes que concurren a la psicogenía de los Lenguas.

El estómago desempeña un rol mucho más moralizador o desmoralizador de lo que quieren admitir los idealistas. Y el estómago de los indios parece haber sido construído según principios técnicos especiales, pues es proverbial la voracidad de los pueblos primitivos. Un caso concreto dará cuenta de la cantidad de alimentos, expresada en kilos, que esa gente puede despachar.

Un día llegaron al puerto de nuestro establecimiento dos piraguas tripuladas con siete indios Lenguas, todos hombres. Pidieron permiso para « tongear » y cocinar « un poco ». En sus embarcaciones traían cinco yacarés y dos carpinchos que habían matado. Eran como las 16. Al otro día, a las 23 horas, los indios se aprontaban para salir: les quedaban dos colas de yacaré y dos cabezas de carpincho, que llevaban para sus mujeres, me dijeron. Todo el resto lo habían sepultado en sus estómagos. Calculando los yacarés en 15 kilos cada uno, y los carpinchos en 30 kilos — las partes comibles de ellos, se entiende — llegamos a un total de 135 kilos de carne que siete indios se habían engullido en menos de 20 horas.

La voracidad fabulosa de los Lenguas es causa y razón de su afán de procurar por todos los medios posibles reducir el número de los comensales a lo estrictamente ineludible, eliminando las bocas inútiles.

V

EL INFANTICIDIO. ENFERMEDADES. ESTOICISMO O INSENSIBILIDAD OTRAS OBSERVACIONES

Es inevitable que la eliminación de las bocas inútiles esté acompañada de circunstancias crueles.

Cuando los Lenguas alcanzan una edad avanzada, cuando su estado físico no les permite satisfacer sus necesidades, toda la tribu carga con armas y bagajes y abandona al anciano en la toldería para que muera de hambre, si no le matan a macanazos.

También la matanza de las criaturas recién nacidas es cosa corriente. Muy raramente se verá en un matrimonio niños cuya edad no difiera, por lo menos, de tres años. Es fácil explicar esa singularidad. Es que se mata a los niños que nacen antes de que su predecesor al-

cance a tres años de edad. De ahí resulta que son muy escasos los matrimonios que tengan más de tres hijos vivos.

La adopción general del infanticidio se debe a las dificultades de alimentación y a los cuidados que exigen los niños pequeños. En las hordas nómadas una mujer no podría viajar con un niño de pecho, otro de un año y un tercero de tres; así es que la macana ancestral debe entrar en función muy a menudo.

Otro rasgo original del carácter Lengua es su indiferencia, su entorpecimiento completo para con todo lo que no toque a las necesidades de la vida animal. Cuando se les hizo oír por primera vez el fonógrafo, quedaron impasibles; nada en sus fisonomías indicaba ni curiosidad, ni sorpresa. No cambiaron una sola palabra entre sí. Entonces se les preguntó cómo creían que se había obtenido la reproducción de la voz humana, y uno de ellos contestó sencillamente : « Los gringos saben hacer. »

Un día pregunté a un Lengua, que no era de los más torpes, si sabía cómo se hacía la pólvora. « ¡Eh! me contestó, la pólvora se compra en los almacenes. » Y me dejó plantado para hacerme ver, de cierto, que tan torpes preguntas le fastidiaban.

Observadores superficiales ponderan a menudo lo robustos y bien formados que son nuestros Lenguas, y la falta absoluta entre ellos de ciegos, dementes, jorobados, etc., y deducen de esto, conclusiones enteramente falsas.

No es que los Lenguas formen una raza más fuerte que las demás. Es que esos indios nacen y se crían en circunstancias tan difíciles, que el frío o el calor, las lluvias, el hambre, las enfermedades y la falta absoluta de conocimientos médicos, establecen una selección natural de las más rigurosas, por lo cual todos los niños débiles y los enfermizos mueren en tierna edad por falta de ambiente propicio para vivir. Son eliminados por la naturaleza, mientras que los ciegos y los cojos, los gibosos y estropeados, lo son por la macana ancestral.

Después de casi treinta años de esfuerzos, la misión inglesa no logró abolir la costumbre del infanticidio entre los Lenguas; tan inveterada es. Es, pues, natural, que en semejantes circunstancias, por esa doble selección, la raza se mantenga robusta.

Otra idea falsa es la que se suele formar de la longevidad de los indios. De todos los indios Lenguas que conocí, cuando en 1888 establecí mi primera población en el Chaco, y que entonces ya podrían tener unos 40 años de edad no vivía más que uno sólo en 1911, cuan-

do volví a pasar una temporada en el territorio que ocupaba esa tribu y entre tres tribus que ahora veo diariamente, no hay una persona que tenga más de 65 años. Y sería un fenómeno inexplicable si fuese de otro modo; hay que ver las penurias porque pasan, hay que saber a qué privaciones están sometidos para comprender que les faltan todos los elementos que podrían prolongar su vida.

La homogeneidad del tipo físico del Lengua ha sido considerada como prueba de su extraordinaria virilidad y de la castidad absoluta de sus mujeres. Pero cualquiera que haya tenido ocasión de examinar prácticamente esas dos hipótesis llegará a opiniones opuestas. Reina entre los Lenguas una antigua costumbre : en cuanto nace un niño cuyo cutis es algo más claro que lo que se debía esperar, muere el niño y a poco la madre también.

Vemos, pues, que son múltiples los factores que deben concurrir a impedir el aumento de la población de las tribus Lenguas. En efecto, en vez de acrecentarse, disminuye constantemente.

Conocí a dos familias o, mejor dicho, dos grupos que vivían apartados y, en 1895, contaban juntas como 75 almas. Volví a verlos en 1909: Las dos familias se habían fusionado en una sola, y no contaban más que 37 personas por todo. Como conocía a todos sus miembros por nombre, investigué el fin que tuvieron, y resultó que habían muerto, unos de fiebre, otros de viruela, otros de una enfermedad del estómago, cuyos síntomas semejaban a los de la hipertrofia de ese órgano. La pulmonía y la tuberculosis, naturalmente, tenían su amplia parte en la mortalidad, principalmente entre los niños. En cuanto a las víctimas de la macana, no me hablaron de ellas.

La raza Lengua está irremediablemente destinada a desaparecer en un plazo que ya se puede calcular.

El avance continuo de la civilización en aquel « eldorado del cazador » y las consiguientes, siempre crecientes, dificultades de alimentación, la fabulosa antipatía que tienen los indios para el uso externo del agua, su increíble pereza que les impide construir casas que les pongan al reparo de la intemperie y, sobre todo, su poca fuerza de resistencia constitucional a las enfermedades internas, aceleran su desaparición.

Es un hecho indiscutible : cuando otras razas se libran sin caso fatal alguno de las enfermedades epidémicas como, por ejemplo, el sarampión, el catarro, el chucho, etc., los Lenguas mueren como moscas o contraen la tisis y mueren más tarde.

Es curioso e inexplicable que, en cambio, las razas indias se sanen

con una facilidad increíble de las más horribles heridas, mientras que no resisten a lo que nosotros llamaríamos una leve indisposición interna.

Un autor criollo ha dicho que las razas indias «sufren callado, estoicismo puro». Pero es permitido dudar si «ese sufrir callado» es verdaderamente consecuencia de su fortaleza moral.

Las razas pardas no sienten el dolor corporal tan agudamente como lo sienten otras razas, las que tienen un sistema nervioso más sutil; no se puede dudar de ello. De los indios del Chaco se puede decir «que no tienen nervios». Ellos pueden sufrir y ver sufrir a otros, sin dar señas de emoción, porque son insensibles a los dolores del alma como lo son a los del cuerpo.

Su impasibilidad en momentos de dolores físicos es efecto de la continua exposición de su cuerpo desnudo al calor, al frío, al viento, a la lluvia, al contacto con el suelo duro donde duermen sin otra cama que su manta, o de condiciones atávicas adquiridas durante el transcurso de muchos siglos de una vida de privaciones.

He visto a un indio arrastrado por una vaca arisca que tenía enlazada y cuya pantorrilla izquierda había sido cortada por un tronco de palmera en toda la extensión desde la rodilla hasta el tobillo de modo que se veían los huesos. Preguntado, dijo que no le dolía nada, y se fué, caminando, despacio sí, pero sin ayuda de nadie, a su toldo que distaba una legua larga.

En el Brasil vi a un indio de la tribu de los Terrenos de 12 a 13 años que tenía un brazo fracturado por una coz de mula; le salían astillas de las carnes del brazo; se le sacaron las astillas, se le cosió la herida principal que era grande y se le colocó un aparato inmovilizador después de arreglar el hueso, operaciones bastante difíciles para diletantes — médico no había a 50 leguas a la rueda — pero el muchacho ni pestañeó; aguantó todo con una sonrisa beata estampada en los labios. Más tarde mientras dormía, le hinqué una aguja en el muslo y no se movió. Cuando participé mis observaciones a dos vecinos que me habían ayudado en la curación, y que no cesaban de ponderar la «fortaleza del alma», el «estoicismo» del muchacho «que sufría callado» ellos pensaron que bromeaba. Entonces, en su presencia, repetí la experiencia de la aguja con el mismo resultado.

VI

ESTÉTICA

Ya hemos visto que los hombres perforan los lóbulos de sus orejas, de modo que pueden introducir en ellos pequeños discos de 5 centímetros de diámetro, lo que, por cierto, no los embellece.

El tatuaje está en uso en todas las tribus indias del Chaco que he podido observar. Los Lenguas se pintan la cara en varios dibujos más o menos simétricos en negro, con la fruta de un árbol llamado *ñandipa* en guaraní, y en bermellón con el *urucu*. Cada dibujo tiene su significado. Los iniciados en esos geroglíficos faciales sabrán al momento por la forma y el color de los dibujos que adornan su cara si el pintado es viudo, novio, o si está de luto, de viaje, de visita, etc.

Las mujeres casadas tratan de alcanzar lo que a ellas parece la última palabra de la belleza femenina — los pechos caídos, colgantes — recurriendo a un procedimiento sencillo: una faja fuertemente atada, da a los pechos la dirección hacia abajo y queda en ese sitio hasta que la forma deseada se obtenga.

Los dos sexos se depilan completamente, y no tienen otros pelos en el cuerpo que los cabellos. Para el efecto se sirven de dos tablitas finas que hacen las veces de pinza.

Pregunté un día a un indio por qué se depilaba las cejas y me contestó que era para ver mejor, pues las cejas estorbaban la vista, y que si me las hubiera sacado, no precisaría anteojos.

La falta de pestañas y de cejas da una expresión atontada a la fisonomía.

En cuanto a la posición social de la mujer Lengua, no se puede decir que es muy elevada. Los hombres la consideran más bien como bestia de carga que como compañera; es ella la que en viaje carga con todos los equipajes, incluso sus hijos. Los hombres llevan sólo sus armas.

VII

INDUSTRIAS. ARMAS. TEJIDOS. CERÁMICA. EL FUEGO. LA CHICHA

Las industrias Lenguas son muy limitadas y primitivas. La más perfeccionada es la de la confección de sus arcos y flechas. Para ha-

cer los primeros emplean la madera de dos árboles, el *yakarandá (jacaranda crispidifolia)* y el *guayakán (Caesalpinia melanocarpa)*. Son muy resistentes y flexibles. Las segundas las hacen de un bambú muy liviano y hueco llamado vulgarmente caña de Castilla, y que, cosa curiosa, ha sido importado no ha más de un siglo. No he podido averiguar de qué hacían flechas antes de su introducción. En ese bambú colocan una punta de madera dura, dentellada o de hierro, tomado de aros de barriles; ambas ocasionan crueles heridas. Esas armas son muy acabadas, a pesar de que los indios no poseen para su confección otras herramientas que hachas y cuchillos. La cuerda del arco se hace del cuero del *guazú-pytá* (venado colorado). Otra arma que usan generalmente es una macana de madera dura de una pulgada y media de diámetro y que termina por una masa redonda o cónica.

Usan también hachitas, pero son importadas.

Del nácar de varias especies de conchillas que se encuentran en abundancia en las lagunas del Chaco, hacen botones bien redondos y plaquitas oblongas que emplean para adornar sus cintos, sus diademas de tejido de lana, y sus collares. Suelen ser muy bien trabajados.

La industria textil de los Lenguas produce pocos objetos: mantas de lana con trama de algodón cuyas dimensiones alcanzan a $1^{m}80$ por $2^{m}10$ al máximum, y cintos del mismo material. El telar del que se sirven para su fabricación consta de cuatro palos unidos en cuadrado y de una espátula para apretar la trama.

En *filoche* hacen varios objetos : pequeñas redes para guardar sus trastes, hamacas de mallas anchas, bolsas en forma de morral *(sonsinghe)* y bolsitas ovaladas que se llevan en la cintura *(ayin)* de las cuales hemos hablado ya.

Es de notar que los Lenguas ignoran el uso de redes de pescar.

La industria cerámica está poco desarrollada. Los Lenguas producen únicamente cántaros, cantarillos y unos pocos objetos de material refractario al fuego. Raramente los adornan con dibujos lineales.

Cabe aquí explicar cómo los Lenguas hacen fuego. A ese efecto se sirven de dos palitos rollizos tomados de diferentes árboles.

El más grueso (del árbol *Calycophyllum Spruceanum)* (1), lo sujetan con un pie, en el suelo, después de haber hecho en una de sus extremidades una pequeña incisión. En ésta se aplica verticalmente la se-

(1) En castellano : *palo blanco* ; en Lengua : *hapín*.

gunda varita que tiene que ser de una madera no muy dura, pero bien seca; se le da un movimiento de rotación entre las dos manos. Después de un rato más o menos largo, la harina fina que se desprende de las maderitas forma un montoncito que paulatinamente arde. Entonces el operador aproxima una estopa bien fina y seca al montón ardiente, sopla con prudencia y la llama se levanta. Dispensado es decir que la operación no es muy fácil, y que no puede tener éxito si todos los materiales no son absolutamente secos, y se comprenderá que las vestales Lenguas se cuiden mucho de dejar apagar el fuego. Cuando la tribu está viajando lleva siempre un respetable tizón; cuando éste amenaza concluirse, pasa toda la horda el tiempo necesario para encender fuego y hacer otro tizón.

La mayor parte de las tribus se han provisto de silex y eslabón y se libraron, por la introducción de este aparato « moderno », del método prehistórico que acabo de describir.

El procedimiento empleado por los Lenguas en la fabricación de su chicha de maíz o de la fruta del algarrobo *(Prosopis dulcis)* es el conocido en otras regiones. Toda la tribu se reune alrededor de grandes vasijas que contienen agua tibia, se hace circular en porongos el maíz o la fruta del algarrobo previamente cocidos, los concurrentes mastican los granos, y echan la pasta obtenida en las vasijas. Cuando éstas están llenas se cubren con mantas, se exponen al sol, y cuando la fermentación empieza a notarse, está listo el néctar; se baten los tambores y... la fiesta empieza.

Nos aseguró una venerable matrona Lengua que nos tiene en grande amistad, que cuando la « fiesta de chicha » está en su apogeo, o como decía ella « cuando la chicha va madurando », las mujeres se apresuran a esconder las armas, porque la chicha « es bicho malo ».

VIII

AGRICULTURA. GANADERÍA. FIESTAS Y COSTUMBRES

Los indios Lenguas y tribus limítrofes poco se ocupan de agricultura. Suelen trabajar en comunidad una pequeña chacra donde plantan mandioca, batatas dulces, zapallos, unos cuantos pies de tabaco, etc.; pero si se repartiera por cabeza de interesados el terreno que ocupan sus plantaciones, pocas varas cuadradas tocarían a cada uno. Los productos cosechados no alcanzan para muchas semanas.

Más adelante veremos de qué modo suelen nuestros indios rematar sus existencias de víveres.

En toda toldería, los Lenguas tienen un reducido número de ovejas, que les sirven para la producción de la lana que emplean en la fabricación de sus mantas, cintos, etc.

Las ovejas Lenguas son muy poco lanudas, pero de regular cuerpo y bastante rústicas. En cuanto a su origen es difícil averiguarlo, pero es muy probable que las hayan traído del norte, puesto que consta que ya tenían mantas de lana de oveja cuando Azara viajaba por el Paraguay, a fines del siglo XVIII, es decir, como cien años antes de la guerra de la Triple alianza (1).

Los Lenguas poseen poco ganado vacuno, circunstancia debida al notable apetito con el que la naturaleza dotó esta especie de la familia del *homo sapiens*, pues si a alguno se le ocurre regalar alguna vaca a los indios, se la engullen sin esperar a que pueda multiplicarse.

A este propósito me viene a la memoria un suceso típico que aconteció en la estación de la Sociedad Sudamericana, de Misiones, cuando aquélla se fundó, el año de 1888. La «estación» estaba establecida sobre el río Paraguay en un lugar denominado Riacho Fernández, hoy Puerto Colón. La misión, novicia entonces en cosas de los indios del Chaco, había regalado a la tribu del cacique Fernández, que allí vivía, unas cuantas vacas y un toro, con la especial condición de que solamente pudieran disponer de los terneros a nacer, dejando intacto el plantel.

Pocos días después llegó el cacique a la estación pidiendo hablar al superintendente y le comunicó que había nacido un ternero. El superintendente, como buen misionero que era, no quiso perder esa ocasión para improvisar un pequeño sermón, ponderando la bondad divina que había regalado a los indios un ternero que más tarde sería una vaca, etc.

— *Ñandéyâra* (2) — dijo el misionero, — creador de todo, ha creado ese ternero a propósito para los indios, que también son hijos de Dios, etc.

(1) Por consiguiente, los autores que pretenden que las ovejas de los Lenguas proceden de las robadas en el Paraguay durante la guerra de la Triple alianza están equivocados.

(2) *Ñandéyâra,* palabra guaraní, inventada por los jesuítas, pues en este idioma no había ninguna para expresar el concepto de la divinidad que los indios guaranís tampoco tenían. Traducida literalmente significa «nuestro dueño». Otra palabra de la misma procedencia es *tupa*; *tu* = padre, y *pa* = todo (padre de todo)

— Sí, señor, contestó el cacique.

Cuando un indio dice « sí señor », se puede estar seguro de que no ha comprendido lo que se le ha dicho.

Pocos días después volvió a aparecer el cacique Fernández, esta vez muy triste, casi llorando.

— Patrón — gritó de lejos, — ¡ha muerto *Ñandéyâra!*

— ¿Estás loco, hombre? Dios es inmortal; no puede morir.

— Pero, patrón, es cierto que ha muerto. Está podrido y los cuervos lo están comiendo. Venga para ver.

Desesperando entenderse, el misionero se fué con el cacique y se encontró con... el toro muerto.

Para el indio, el toro era el *Ñandéyâra* que había procreado el ternero.

Dos meses después el misionero murió de una pulmonía contraída durante un temporal que le sorprendió en viaje, y sus compañeros le llevaron a Concepción, para sepultarle en tierra cristiana. Cuando volvieron a la estación de la misión después de unos ocho días de ausencia, no encontraron ni una sola vaca; los indios habían aprovechado la ocasión para convidar a dos o tres tribus vecinas, y en una fiesta que duró tres días y sus noches se habían engullido todo el plantel de la futura estancia Lengua. Era al superintendente que habían prometido no comer las vacas; el superintendente había muerto, por consiguiente, ellos, los indios, quedaban librados de su promesa.

Pero, desde entonces, los misioneros no les regalaron más vacas.

Esa costumbre de hacer « fiestas » convidando a los vecinos, que los aficionados a teorías socialistas llamarían « comunismo natural » o cosa parecida, es general entre todas las naciones del Chaco.

Es imposible que guarden algo que sirva para comer. Cuando maduran las batatas dulces, o la mandioca, o cualquiera otra fruta comestible hacen « fiesta de batatas, fiesta de mandioca, etc. », que duran el tiempo necesario para consumir la cosecha en una sesión única, dos, tres días y sus noches según la importancia del « stock » y el número de los comensales.

Y después se quedan los dueños de casa con ganas de comer hasta que les inviten sus vecinos a nuevas fiestas.

Esas fiestas están siempre amenizadas por *mucha* música: el tambor — una calabaza o una olla de hierro sobre las que está tendido un cuerito silvestre — suena todo el tiempo que dura la fiesta, sin parar un instante. El *pum, pum, pum* se siente, de noche, a leguas de distancia.

Asimismo no cesa el canto monótono del coro de los hombres. Sus melodías muy bien se podrían anotar con una docena de notas. Cuando se acaba la frase musical, se empieza de nuevo, pero en lugar de transportarla a otro tono, la repiten a la sordina, y así siguen toda la noche.

No carecen sus cantos de una cierta salvaje poesía, pero su eterna monotonía podría enloquecer a cualquier neurasténico. Los Lenguas cantan bailando y los movimientos de sus danzas son muy rítmicos y arreglados a la monotonía del acompañamiento vocal.

Mientras dura la fiesta, las mujeres no cesan de hacer circular en calabazas o sobre abanicos «el plato del día», mandioca, batata, carne de carpincho, pescado, o lo que sea. De tiempo en tiempo unos cuantos cantores callan para emplear la boca en ocupaciones prácticamente más provechosas. Hartados, vuelven a la danza.

Pero no son todas sus fiestas o veladas musicales de índole gastronómica. Una de las más originales de sus veladas es la que acompaña las conjuraciones del brujo de la tribu, cuando está curando a algún enfermo. El canto, muy *staccato* y lúgubre, es más bien un aullido rítmico que una melodía, y tiene por objeto espantar al *kilyikhama,* el espíritu malo, causante de la enfermedad. Es éste, siempre, el culpable.

Las conjuraciones del brujo consisten en masajes prolíficos y algunas veces en succiones de la parte enferma, pero a menudo de cualquier otra parte del cuerpo.

Cuando el brujo echa de ver que el paciente siente alivio, escamoteando de sus bolsillos una piedra, un huevo, un sapo, o cualquier otro bicho, hace como si lo hubiera sacado con su boca del cuerpo del enfermo.

En el caso contrario, es decir, cuando el enfermo no da señas de alivio, el brujo declara que no tiene poder contra esa clase de *kilyikhama* (parece que los hay muy malignos), y entonces, generalmente ya de madrugada, cesa la música: los espíritus de las tinieblas quedan dueños del campo de batalla y el pobre enfermo está libre de morir a gusto.

Se festeja la nubilidad de las muchachas con concierto danzante. Esta fiesta la llaman *wainkya.* Nunca he podido asistir a una *wainkya* (1). Cuando pregunté a los indios por qué no me avisaban como

(1) *Wainkya,* palabra Lengua que significa olla (de hierro). Se denomina así la fiesta a causa del tambor que se toca en ella, y que consiste en una olla de hierro cubierta con un cuerito silvestre tendido.

de costumbre, me contestaron con un pertinaz silencio. Sabiendo por experiencia que cuando un indio no quiere decir una cosa ni a a palos la dirá, recurrí a la persuación interrogando a una muchacha algo diabla que ya me había divulgado muchos secretos. Después de hesitar un momento me contestó : « Para que ustedes no vean cosas. » Y se fué riendo.

Otras fiestas llamadas *kyaiya* se hacen para festejar las estaciones del año. Los hombres solos bailan en las *kyaiya*. Por lo demás, esas fiestas se parecen a las otras.

IX

LOS LENGUAS CAZADORES Y PESCADORES

Hemos visto ya que las armas primitivas de los Lenguas son el arco y la macana. Además usan cuchillos, machetes y fusiles, que naturalmente son de fabricación europea, y lanzas, con puntas de fierro, que compran.

En el arco son muy diestros, aunque cuando el viento es algo fuerte la desviación de la flecha no se puede calcular con exactitud; además, cualquiera paja que toque la flecha en su trayecto hace desviar ese proyectil. Aun sin esos obstáculos el arquero erra a menudo a distancias superiores a 40 metros, y todo lo que se ha escrito de las flechas infalibles de los indios se debe considerar como mera literatura.

Cuando el cazador Lengua divisa un animal comible, aunque a distancia inalcanzable para sus armas, tira. Si acierta es gloria; si no, va en busca de su flecha y la guarda para otra ocasión.

En cuanto a su maestría con armas de fuego es más que discutible. Sus escopetas son de chimenea y de calidad muy inferior. Basta que el animal sea herido levemente para que no se les escape: con esa proverbial paciencia india persiguen su presa aunque dure la persecución hasta la noche, y no cejan hasta volver a encontrarla y ultimarla. Es verdaderamente maravilloso su talento para seguir un rastro; donde nosotros, cazadores europeos, monteros de experiencia, no vemos sino lodo duro como adobe o pasto seco, ellos descubren la impresión del pie del ciervo, y dirán todavía cuánto tiempo hace que pasó el animal!

Con rifles — es decir, con fusiles para balas — los Lenguas son sencillamente inútiles; no aprenden a calcular la distancia ni a arreglar la puntería.

Huelga decir que los Lenguas no respetan bicho comible alguno, y que por consiguiente matan el hijo con la madre. Se explica, pues, cómo la caza del Chaco merma rápidamente. Donde se han establecido indiadas se puede caminar días enteros sin ver un animal *cazable*.

Cuando llega el tiempo de la nidificación, toda la toldería — hombres, mujeres, niños — salen a cazar huevos y pichones de pájaros sin consideración alguna. Destrucción bárbara : los indios nada producen para vivir; viven para destruir.

Un interesante modo de cazar el avestruz es el de los Lenguas. El avestruz, siendo muy perseguido en el Chaco, se ha vuelto muy arisco y difícil de cazar. Usan los indios el artificio siguiente : visten un poncho hecho de yerbas y hojas de palmeras, encierran su cabeza en un estuche trenzado de hojas o yuyos de modo que a alguna distancia el cazador parece un arbusto. Así disfrazado — lo hacen en menos de 5 minutos, — el cazador se va derecho a los avestruces, que por mucho que vigilen, no pueden descubrir al hombre debajo del follaje. Si el centinela de los avestruces mira hacia su lado, se detiene el cazador, y vuelve a caminar cuando cesa la atención del avestruz. Una vez a buena distancia, tira como si fuera en un polígono. Naturalmente, el cazador debe tener la precaución de fijarse en la dirección del viento antes de aproximarse a los avestruces, pues ellos olfatean a increíbles distancias.

En los pajonales altos del Chaco, donde un hombre a caballo queda invisible, la caza es imposible; pero en invierno, cuando después de escarchas repetidas se ha secado el pastizal, los Lenguas esperan un día de viento favorable para organizar cacerías al fuego. Encienden fuego al campo en varios puntos en un frente calculado según el número de cazadores. Esos siguen el fuego, pues, cosa extraña, los ciervos y otros animales en lugar de huir ante el fuego, como se puede leer en las novelas y en los relatos de viaje, se quedan tranquilamente en su sitio hasta que se aproxima el fuego, y pasan de un salto rápido por encima de las llamas, donde los espera el plomo o las flechas de los cazadores.

En los bosques, los cazadores Lenguas son menos diestros, puesto que el territorio que ocupan en el Chaco, no contiene más del 20 por ciento de selvas y no es adecuado para formar monteros. La mayoría de ellos no aprendieron a caminar en los bosques, y les falta la agilidad, la flexibilidad necesaria para caminar en el bosque sin hacer ruido. Son naturales de esteros, estepas o pampas. Una

vez que no ven más el sol pierden la dirección, se desorientan y erran como buque sin timón.

Como pescadores, aunque no conozcan el uso de las redes, son muy ingeniosos. De naturaleza paciente y perezosa, tienen esas dos virtudes que son el adorno de todos los pescadores a la línea. Pero las estaciones del año suelen traer circunstancias muy propicias para permitir a los Lenguas realizar pescas bíblicas sin departir de sus hábitos de haraganería. Cuando en invierno se secan las lagunas y los esteros, que suelen ser de muy poca hondura, se puede recoger los pescados matándolos a garrotazos...

Suelen ser tan grandes las cantidades de pescados que consiguen de este modo, que a los pocos días ya se puede notar un considerable aumento de carnes en los miembros de toda la tribu.

X

DE ALGUNAS VIRTUDES DE LOS LENGUAS

La mejor de todas las cualidades positivas de los indios Lenguas consiste, quizá, en que no son antropófagos. Me dijeron, sin embargo, que conocían la existencia de la antropofagia en *otras* naciones. Mas no pude sacar nada de ellos; pero no me cabe duda alguna de que hayan sido antropófagos anteriormente, en vista de las frecuentes faltas de alimento que les debe haber apremiado a menudo antes que tuvieran relaciones comerciales con los cristianos. Sus obstinados *kyahas* (no sé) no eran para convencerme de la limpieza de su pasado.

Y ya que estamos hablando de buenas cualidades de los Lenguas, no debo dejar pasar la oportunidad de hacer mención honorable de la buena voluntad y de la paciencia que despliegan para enseñar y explicar su idioma. Al contrario de la costumbre de sus vecinos cristianos del otro lado del río, que no dejan escapar ocasión para burlarse del extranjero que intenta hablar el guaraní, los Lenguas se empeñan en comprender lo que se les quiere decir, y nunca se ríen, dando prueba de una cordura y un tacto dignos de gente civilizada.

XI

¿CÓMO TRATAR A LOS INDIOS?

Un señor extranjero, dueño de unos campos en el Chaco septentrional, me escribió hace algún tiempo consultándome respecto al *modus vivendi* a adoptar para con los indios que habitan sus terrenos en el caso que los tomara en explotación (1).

Debemos, ante todo, sentar un principio de derecho : los indios que habitan esas regiones desde tiempos inmemoriales son sus dueños legítimos; por consiguiente el fisco que vendió esos campos como si fuesen *fiscales,* propiamente dicho, a pesar de que eran particulares, propiedad innegable de sus primeros ocupantes, los indios, el Estado, digo, en principio, tenía la obligación de indemnizar a esos indios desde que enajenaba el lugar que aquéllos habitaban.

Pero, en la práctica, una indemnización *in natura* era muy difícil de realizar, puesto que no se puede establecer poblaciones permanentes, grandes, en el Chaco septentrional, por razones geohidrográficas existentes en todos los territorios de ese litoral. Por otra parte, las indemnizaciones pecuniarias, vista la deficiencia de aptitudes económicas de los indios, no resolverían el problema.

De este modo, el Estado tuvo que dejar a los indios donde estaban, dejando tácitamente al comprador de las tierras el cuidado y el deber de entenderse equitativamente con ellos.

Vamos a ver ahora cómo los compradores cumplieron con esa obligación aceptada « tácitamente ».

Los primeros pobladores del Chaco septentrional — estoy hablando de unos 35 años atrás y me refiero a los pobladores cristianos — tomaron posesión de esos terrenos con todos sus habitantes primitivos : tierras vírgenes y gente que muy poco o ningún roce habían tenido hasta entonces con los cristianos. Fácil hubiera sido en aquellos tiempos amoldarlos, educarlos bien, puesto que pocas malas costumbres, pocos vicios tenían entonces. Mansos por índole, poco aficionados a aventuras bélicas y, comparativamente, de instinto poco feroz, los Lenguas constituían una materia prima bastante pura, muy maleable, de la cual, con buena voluntad y tino, se hubiera podido obtener un

(1) Hago presente al lector que estas páginas han sido escritas en 1912.

producto muy superior a lo que es actualmente el Lengua del litoral chaqueño.

Si los Lenguas son, en general, haraganes y rateros, es porque los primeros cristianos que ocuparon sus servicios los educaron mal; es porque los pagaron mezquinamente; es porque los explotaron indignamente, haciéndoles perder de esa manera la poca afición natural que tenían al trabajo; es porque en su lógica selvática, que en ciertos casos no es tan absurda como se podría creer, se dijeron : « Los cristianos nos prometieron pagar bien, pero pagan mal, o no pagan del todo. Para trabajar hay que comer; tomamos vacas para comer, es nuestro derecho; tomamos lo prometido, lo que es nuestro. No robamos. »

Si los Lenguas son ladrones y ebrios es porque sus patrones lo eran también, pues hubo un tiempo en que, para el consumo de ciertas estancias del Chaco, se carneaba sistemáticamente reses de los vecinos, y que se hacía un *sport* de marcar terneros ajenos, ostensiblemente a la vista de todos. Naturalmente, los indios se dijeron : « Cristiano Fulano se come las vacas de Zutano, y nada le sucede. ¿ Por qué no me comeré yo también vacas de Fulano y Zutano ? »

No doy la culpa de esas picardías a los dueños de los campos de entonces; ellos vivían lejos, en la Argentina o en Asunción, y de cierto no habrán sido ellos los que ordenaron esos procedimientos... económicos. Pero sus encargados y habilitados, los primeros en su afán de acreditarse con los dueños por su administración barata, los segundos por su amor al lucro, son los culpables de la seducción del indio por los malos ejemplos.

En resumen : al principio los indios carnearon de tiempo en tiempo algunas reses de los hacendados convecinos para « cobrar » sus cuentas, y después quedaron con la costumbre de comer hacienda ajena.

Pero ese afán de desquitarse no fué el solo factor del cual resultó el estado actual de cosas.

Pongámonos en lugar de los indios : supongamos que tenemos tierras, casa, hacienda, y familia en el Chaco que tenemos derecho de caza y de pesca, derecho de cruzar los campos a nuestro gusto, que consideramos todo lo que se halla al rededor nuestro como legítima propiedad nuestra, heredada de nuestros antepasados desde siglos, de padre a hijo. Supongamos que de repente se nos quite todo, se queme nuestras casas, se mate a nuestros hijos (1) y se nos obligue a internarnos en los montes o esteros, ¿ qué diríamos ?

(1) Alusión a sucesos acontecidos en 1910.

Si por ventura nos presentáramos a reclamar ante los intrusos éstos nos contestarían : « Amigo, compramos el campo al gobierno, lo pagamos ; por consiguiente es nuestro. Y ahora mándese mudar, y no venga más a espantar nuestro ganado. »

Entonces, nos retiraríamos : son ellos muchos y bien armados. Nos retiramos a lugares donde pensamos no estorbar a nadie. Pero aumenta la hacienda, y los estancieros están obligados a formar puestos, sucursales al rededor de su establecimiento principal, y tenemos que volver a emigrar o a quedar quietos y alimentarnos de ganado ajeno. Es una consecuencia ineludible.

¿ Es de extrañar, entonces, que los indios sean cuatreros ?

Se ve, pues, que en ninguna parte los compradores de los campos del Chaco cumplieron con las obligaciones impuestas por el gobierno y que ellos aceptaron tácitamente, y es de admirar que no se hayan originado conflictos serios entre ambas partes.

Una cuestión que merece un corto examen es la de si es conveniente al dueño de un campo alistar a los indios como trabajadores en sus establecimientos del Chaco.

Opino por la afirmativa, no porque — como personas poco enteradas de las circunstancias locales lo podrían creer — sea más barato su trabajo, pues ya he dicho en otro lugar que el sueldo que reciben, por insignificante que sea, no lo merecen, sino porque es conveniente que se les haga trabajar por varias razones independientes del salario :

1ª Porque de este modo se facilita a los indios medios de vivir, sin que se vean en la necesidad de robar;

2ª Porque estando reunidos cerca de los puestos, estarían menos expuestos a la tentación de cazar vacas en lugar de ciervos, pudiéndose de ese modo fiscalizar mejor sus movimientos;

3ª Porque acostumbrar a los indios al trabajo es civilizarlos.

GRAMÁTICA DEL IDIOMA LENGUA

Al publicar estas ligeras anotaciones no tengo la pretensión de dar una gramática completa del idioma Lengua; mi objeto es sólo hacerlo conocer sumariamente.

Las tribus que hablan el Lengua son, a más de los Lenguas propiamente dichos, los Sanapanahs, los Angahités y los Mascois. Las pro-

nunciaciones adoptadas por las diferentes tribus difieren mucho entre sí, y varían hasta entre ciertos grupos pertenecientes a la misma tribu. En cuanto a determinar cuál, entre tantas variantes, es la pronunciación más correcta y cuáles son las corruptas, para ello me falta cualquiera base. Trataré de ortografiar ese idoma como lo hablan la mayoría de los Lenguas ribereños del río Paraguay.

Comparé mis anotaciones con las de algunos miembros de la South American Mission's Society, establecidos en el Chaco septentrional en el lugar denominado Pahisiamtawa, bajo 23°30″ de latitud sur y 59° longitud oeste de Greenwich. Para permitir y simplificar comparaciones adopté más o menos el mismo sistema que los misioneros siguieron, aunque esté éste lejos de corresponder a los métodos científicos usados generalmente para la formación de gramáticas.

Los ingleses, habituados a dar cuatro o cinco pronunciaciones diferentes a cada una de sus cinco vocales, no pudieron menos que dividir las vocales del idioma Lengua en naturales, breves, agudas y prolongadas, y para el efecto propusieron signos o acentos gráficos convencionales para distinguir los sonidos que representan. Para su impresión sería necesario hacer fabricar tipos especiales.

Después de un examen detenido, visto que las diferencias entre vocales naturales, breves y agudas no pasan de ser sutilidades insignificantes y más bien parecen ser diferencias de pronunciaciones individuales, me decidí a hacer caso omiso de ellas, y me limité a distinguir únicamente las vocales breves o naturales de las largas o prolongadas.

He tratado de representar la fonética del idioma Lengua de tal modo que sea comprensible, tanto para los lectores de habla latina, como para los de habla germano-escandinava.

Suprimí la *c* que en varios idiomas tiene pronunciaciones diferentes, y la reemplacé por la *k*, donde su pronunciación era dura como en : col, can, casa, cosa, y por la *s* donde suena más o menos como *s* (cepillo, cebada, ciruela, cinto).

La aspiración *(spiritus asper)*, que es muy frecuente en Lengua, la indiqué por la *h* delante de vocales.

La *w* (doble *v*) se pronuncia como en holandés y alemán, es decir, como *v* castellana pronunciada muy suavemente.

Recapitulando :

DE LAS LETRAS DEL ALFABETO

Las letras necesarias para escribir y hablar en Lengua son las siguientes:

Vocales. — *A, e, i, o, u.* Se pronuncian como en castellano.

Para indicar la pronunciación larga de las vocales añadí un *h*: *ah, eh, ih, oh, uh,* obteniendo de este modo un sonido parecido al de dos *a,* dos *e,* etc., pronunciadas rápidamente una tras de otra.

Diptongos. — *Ai, au, ie, oi* y *ou.* Esos diptongos se pronuncian de modo que formen un sonido solo como en las voces castellanas: *hay, hoy, voy.*

Consonantes. — *B, ch, g, h, k, l, m, n, ñ, p, s, t, w, y, z.* La *h* delante de una vocal es siempre aspirada, como en francés: *hêtre, héron, haricot,* etc., y como en alemán: *Haar, Herr, hier,* etc.

Las letras *c, d, f, j, q, r, v,* no existen en Lengua; la *q* tiene su equivalente en la *k.*

La *ch* inicial se pronuncia como en castellano *tch,* o *tsch* en francés y alemán, o como en *cheese, chase* en inglés. Cuando la *ch* es terminal, como en *sanach* (ciervo), se pronuncia como la *j* en castellano (reloj).

La *y* es siempre consonante como en *ya, yacer, yeso, yo* en castellano.

Existe en el idioma Lengua un sonido que se puede reproducir casi exactamente por la *th* inglesa bien pronunciada, sonido que representaré por *tz,* que reproduce aproximadamente su equivalente en castellano.

DEL SUBSTANTIVO Y DEL ARTÍCULO

Es imposible separar el estudio de estas dos partes de la oración, porque el artículo está, a menudo, inseparablemente unido con el substantivo.

En el Lengua no existe el género neutro; todos los substantivos son femeninos o masculinos. La mayor parte de ellos pertenecen al género femenino. Es de notar que todos los substantivos que principian por *b, p, nahp, nahb* y *nip* son masculinos.

En la mayor parte de los idiomas europeos se conoce el género de un substantivo por la sílaba terminal del mismo o por el artículo y los adjetivos que le acompañan. En el Lengua es la sílaba inicial que indica el género de la mayoría de los substantivos.

Son también masculinos:

Pahpa, cerda.
Pahna, garza mora.
Pehé, lagarto.
Paiya, mosquito.
Peyim, abeja, miel.
Bobyit, venado.
Piyim, iguana.
Napuikting, rana.
Nahnakseĥé, tatú.
Pomahp, jabalí.
Pomoho, laucha.
Piltihn, luna.
Pilmhit, arco iris.
Pitz-patz, arco.
Bastiahmkahm, hormiga.
Nihpthana, tigre.
Nipkyésik, oveja.

Con esos nombres *no se usa artículo,* pues su *género* ya está indicado por los prefijos; es decir, que *b, p, nahp, nahb* y *nip* iniciales correspondería a la terminación *o,* que en castellano indica el género masculino del substantivo.

El artículo definido masculino singular, propiamente dicho, es *ab* o *ap.*

Ap tzlabin, el avestruz.
Ab mewa, el águila.

Son masculinos los nombres siguientes, a pesar de que no tienen el prefijo indicador de ese género:

Entzlitz, hombre, gente, Lengua.
Apawa, manta, tejido.
Wainkya, olla.
Kyahiya, fiesta.
Nata, tortuga chica.
Takhe, trueno.
Sowa, langosta.
Lanaip, venadillo.
Winak, cigüeña.
Tigma o *tingma,* techo.
Sonsinghe, bolsa de red.
Watzwa, cantarilla.
Yapa, mosca.
Miktikting, pato negro.
Sappu, mandioca.
Kasik, cotorrita.
Abyoha, estrella.
Abyiham, sur o frío, invierno.

Poco se usa el artículo definido en la oración; lo mismo se puede decir del artículo indefinido *un.* El indio dirá siempre en lugar de: El hombre no tiene el cuchillo:

Makyi sowu entzlitz ma, no tiene (un) cuchillo (el) hombre no.
Tiyepek yatnatzling, lejos está (el) caballo; etc.

La sintaxis Lengua difiere mucho de la de otros idiomas. En la oración el artículo definido no se aplica al substantivo sino al verbo, adverbio, pronombre, adjetivo o preposición:

Aptzlapok entzlitz, el hay mucho gente.

Ingmatneyik waitkya (nombre genérico), la está carneada animal vacuno (femenino en Lengua).

El artículo femenino *ing,* la, está sujeto a muchas transformaciones que se ha convenido en llamar eufónicas. Las formas eufónicas de *ing* son : *ig, in, im, inge, ik :*

Ik henah, el tabaco.
Ik hem, el sol (el día).
Ik pung, el caracol.
Ik topiti, la hormiga negra.
In kilahana (1), la mujer animal del sexo femenino, hembra.
Ik panakté, el arbusto (yuyo).
Ik ko, la estera.
Ig gewa, la víbora.
Ig mewa, el puma.
Ik pauma, la serrazón, neblina.
In lolach, la anguila.
Ing haikuk, la oreja, la tasa.

Los nombres genéricos pueden ser femeninos o masculinos; el sexo del animal del cual se está hablando no influye sobre el género del nombre genérico.

Para determinar el sexo de los animales se añade las palabras *kilahana,* hembra, o *kilnowo,* macho, y en esos casos se usa el substantivo como adjetivo, lo mismo como sucede también en castellano : una oveja hembra, un conejo macho.

Waitkya es el nombre genérico del ganado vacuno. Los géneros se forman de la manera siguiente :

Waitkya in kilahana, vacuno la hembra (vaca).
Waitkya in kilnowu, vacuno *la* macho (toro).
Waitkya in yankilwanu, vacuno la parecida a macho (novillo castrado).

Yatnatzling es el nombre genérico de la hacienda caballar :
Yatnatzling ap kilahana, caballar *el* hembra yegua.
Yatnatzling ap kilnowu, caballar *el* macho (caballo entero).
Yatnatzling ap yankilnawu, caballar el parecido a macho (caballo capón).

(1) *Kilahana* y *kilwana* son las pronunciaciones más corrientes en diferentes tribus.

Son denominaciones un poco largas, pero que no dejan lugar a dudas.

Fijándose en estos ejemplos se ve que en la oración se pone el substantivo adelante, en seguida el artículo, y el adjetivo al último; que los géneros del substantivo y del adjetivo concuerdan; y que cuando el substantivo genérico es femenino, por ejemplo, lo es también el adjetivo, *aun cuando el substantivo se refiera a un sujeto del sexo masculino.*

El idioma Lengua es sintético, como lo son la mayor parte de los idiomas aborígenes de Sud América, y es natural que, siendo todos los conceptos deducidos de cosas conocidas, se haya adoptado expresiones uniformes para indicar las resultantes igualmente uniformes obtenidas por aquel procedimiento sintético. Conociendo, por ejemplo, la tortuga terrestre chica que llaman *nata,* los Lenguas encontrando una especie de tortuga diferente, más grande pero parecida a la especie conocida, forman un nombre nuevo, añadiendo el comparativo *yata* (como) al nombre existente, y forman *yatnata.* Ese comparativo, cuya raíz es *yata,* tiene sus eufonías : *yat, yate, yatip, yatab, yatap, yating, yanta* o *yit,* según la letra o sonido que sigue. Ejemplos :

Pomohap, jabalí; *yantapomohap,* como el jabalí (cerdo casero).

Paihya, mosquito; *yatapaihya,* como el mosquito (una especie de ortiga).

Como se ve, en este último ejemplo se comparan dos objetos muy diferentes, pero que tienen la misma propiedad, pues la ortiga pica *como* el mosquito : *yatapahiya.*

Bobyit, venado gris, forma *yatabobyit,* venado colorado.
Wainkya, olla, forma *yatingwainkya,* cacerola.
Biyim, iguana, forma *yatabiyim,* yacaré.
Naptzling, anta, forma *yatnapotzling,* caballo.
Mitikting, pato negro, forma *yatamiktikting,* ganso silvestre negro.
Watzwa, cantarillo, forma *yatingwatzwa,* cántaro.

Para facilitar la comprensión de la fraseología Lengua es menester conocer algunas palabras pertenecientes a otras partes de la oración.

El afijo *aihaha* se añade a los substantivos para formar la alternativa-interrogativa. Ejemplo :

Watsam, río.
Watsamaihaha?, ¿ es río (lo que se ve) o no es ?

La contestación, si es afirmativa, es muy sencilla. Basta decir: *watsam,* río, con tono convencido. Si es negativa la contestación, se añade el prefijo *ikhawé* al substantivo: *ikhawéwatsam,* no (es) río. Pero hay que tener en cuenta que el afijo *aihaha* no es más que una forma interrogativa alternativa, como el prefijo *ikhawé* es la negación de la primera, sin que el uno ni el otro tengan que ver con los verbos *ser, estar, haber* o *tener:*

Sapmahak?, ¿adónde?
Sapwam?, ¿cuánto?
Saptaha?, ¿qué dijo, qué hizo?
Sabwisaiha?, ¿cómo se llama?
Pok, otro.
(Estas locuciones se usan solamente con substantivos masculinos.)

Son locuciones adverbiales, adverbios o adjetivos que eliminan la necesidad de emplear verbos, siendo la interrogación indicada por la inflexión de la voz:

Sapmahak? puede significar: ¿dónde está?, ¿dónde encontrastes, pusistes, vas, oyes tú? etc.

Sapwam?, ¿cuánto vale?, ¿cuántos son, cuántos años tienes? o ¿cuántas cosas me das? etc.

Saptaha?, ¿qué dices, qué haces, qué significa eso, qué resuelves tú?, ¿y después?, ¿y entonces?

Cada una de esas palabras puede significar un montón de cosas, según el caso que se ofrezca.

El adjetivo *pok,* otro, pierde la *k* por eufonía delante de las consonantes: *pobyiam?,* ¿el otro invierno? (próximo a venir), pero conservan la *k* cuando sigue una vocal:

Pokentzlitz?, ¿es otro hombre?, venga otro hombre, fué, etc., otro hombre, según el caso.

Matzla, igual.
Anham / *Kyinham* } también, y, igualmente.

Aplicaciones:

Bobyit kyinham yatabobyit, venados grises y venados colorados.

Los substantivos siguientes son femeninos:

Tatzla, fuego.
Atitz, escoria.
Etin, humo.
Amai, camino.
Pahat, pasto.
Tawá, hachita.
Itzma, bosque.
Ayin, bolsa de cintura.
Aksak, cosa.
Lamum, mostacillas.
Mitaimanga, piedra.
Enmanga, escopeta.
Pehéyi, batata.
Awyaha, noticias.
Yasik, sal.
Natata, gallina.
Ilwata, riacho.
Watsam, río.
Tahma, piola.
Yakteba, zapallito.
Singhegi, zapallo largo.
Kames, gato.
Yiphupaiha, nube.
Kilyikhama, fantasma, diablo.

Para decir: no hay, no está, no existe, se emplea una forma de negación especial, absoluta, y que tampoco no es modo alguno de verbo. Es *maksakma* palabra que se explica así: *m* es negación inicial, *aksak* cosa, y *ma* negación terminal, luego significa: no cosa no. Pero en el uso con otros substantivos, por eufonía, la *m* inicial se transforma algunas veces en *mak:*

Mak yi tawa entzlitz ma, literalmente traducido: no tiene hacha hombre no; para decir que: el hombre no tiene hacha.
Mentzlitz ma, no hay gente, no está nadie.
Metinnamai ma, no humo en camino no, no hay humo en el camino.

Hemos visto ya que se forman nombres compuestos con substantivos masculinos, al singular o al plural sin variación, haciendo precederlos del prefijo comparativo *yat, yatan,* etc.; para formar nombres compuestos con substantivos femeninos, el comparativo prefijo es: *yam,* y sus variaciones eufónicas: *yang, yin, yim.*

Yamyasik (como la sal), quinina.
Yamatsla (como la palma), dátil.
Yamaiyin (como la bolsita de red), bolsa de red grande.
Yamyamit (como el árbol, pero más grande), lapacho.
Yamigminasma (como la víbora), ñacanina.
Yampahat (como el pasto), caña de azúcar.
Yamsowu (como el fierro), oro o plata.
Yaggewa (como la cascabel), víbora de la cruz.
Yamit, árbol (nombre genérico).

Yahamit (como el árbol), canoa, piragua.
Yantekomek (como las manos), vapor de ruedas.
Yigmin (como se bebe), agua *(minye,* beber).
Yimmaling (como esconder, entrar), zorro.

Las formas interrogativas para los substantivos femeninos son:

Sakmahak, ¿adónde? (ella).
Sagwam, ¿cuántas? (ellas).
Saktaha, ¿qué hizo, dijo, etc. (ella)?
Sigwisahi, ¿cómo se llama (ella)?
Mok, otra.

También *mok* pierde la *k* por eufonía delante de ciertas palabras: *moinkilana,* mujer la otra (mujer, hembra).

El femenino se emplea siempre en la oración *dirigiéndose a una mujer.* Ej.: el marido, *aptawa,* es masculino. Cuando ella pregunta por su marido, le llamará: *itawa,* es decir, la marido.

DEL PLURAL DE LOS SUBSTANTIVOS

Aunque en el Lengua existe el plural, es muy poco usado. El plural de los substantivos masculinos se forma con el afijo *ak,* pero ese afijo está sujeto a tantas y tan caprichosas modificaciones eufónicas, que ardua tarea sería el querer establecer reglas y determinar el por qué de aquellos cambios eufónicos.

La terminación regular del plural masculino es, pues, *ak,* con las formas eufónicas *a, ab* y *ka.*

Entzlitz, hombre.	*Entzlitzak,* hombres.
Aksak, cosa.	*Absahak,* cosas.
Tamup, casa abandonada.	*Tampa,* casas abandonadas.
Namuk, palo borracho.	*Namka,* palos borrachos.
Wukma, mozo, joven.	*Wukmahak,* mozos, jóvenes.

En cuanto a la forma plural de los substantivos femeninos, ella es todavía más caprichosa; sus transformaciones eufónicas son: *aik, ik, a, haha, pa, na, wa, taik, paik,* etc.

Amyip, jardín.	*Amyippaik,* jardines.
Napkat, chumacera.	*Napkataik,* chumaceras.
Tzlapup, pipa, tierra.	*Tzlapak,* pipas, tierras.

Sangni, estero. — *Sangaik,* esteros.
Takhatzpuk, tumba. — *Takhatzpupaik,* tumbas.
Matzlik, hoyo, zanja. — *Matzchaha,* hoyos, zanjas.
Itzyenip, islote de monte. — *Itzyenpa,* islotes de monte.
Inkyin, madre. — *Inkyana,* madres.
Malamang, boquerón, abertura, la orilla del monte. — *Malangwa,* boquerones, aberturas, la orilla del monte.

Nótese que el plural de *tzlapup,* pipa, es *tzlapak,* es decir, que a pesar de ser femenino ese substantivo en Lengua, toma el afijo del plural de los substantivos masculinos!

Felizmente que en Lengua se puede perfectamente hacer comprender haciendo caso omiso del plural, pues es muy difícil y se precisa mucho estudio y práctica para emplearlo correctamente.

Aptzlapok, muchos.
Intzlamok, muchas.

Entzlitz natzlapup, hombre a pie; *natzlapup* es una locución adverbial aglomerada, que se emplea como adjetivo y significa : a pie.

Entzlitz natzlapok, muchos hombres a pie.
Inkilahana natzlamok, muchas mujeres a pie.

Lo que facilita mucho el aprendizaje y el hablar del idioma, es el laconismo natural de los indios Lenguas. Si en viaje, por ejemplo, para orientarse mejor, un indio sube a un árbol, dirá a medida que divise algo : *etin!* (humo); después de un rato : *amai!* (camino); *samkuk* (casa), etc., indicando con un gesto de mano la dirección donde se ven las cosas.

También si el indio mientras trabaja precisara de un cuchillo, él no ha de cansarse la lengua en decir : ¿ Quiere usted tener la amabilidad de alcanzarme ese cuchillo? Dirá imperativamente : *sawu!,* ¡cuchillo! y nada más.

Entra un indio en un almacén y pide mostacillas, lacónicamente : *lamum,* y deposita al mismo tiempo el dinero o el objeto (cuero, plumas, cera, etc.) que desea dar en pago de las mostacillas. Si le agrada la calidad y cantidad de *lamum,* dirá, quizá, *tahasch* (lindo, bueno), o, en el caso contrario, saldrá callado de la tienda.

Ese sistema de conversación es muy cómodo y ayuda mucho al novicio estudiante, puesto que con aprender cuatro o cinco docenas de las palabras más corrientes en la vida del campo, etc., puede compren-

der y hacerse comprender y entrar inmediatamente en el estudio práctico del idioma, sin necesidad de quebrantarse la cabeza con las conjugaciones de los *modos aun que sea de un solo verbo.*

DE LOS PRONOMBRES POSESIVOS

La mayor parte de los pronombres posesivos Lenguas son *reflexivos,* es decir, que pueden indicar al mismo tiempo el género y número del sujeto poseedor y del complemento o régimen poseído.

Ahankuk, mío.
Apankuk, su, suyo, de él, de aquéllo.
Ankuk, su, suya, de ella, de aquélla.
Inginkuk, nuestro, nuestra.
Kyelpankuk, de ustedes (vuestros, vuestras), siendo los poseedores hombres, y
Kyelankuk, de ustedes, siendo mujeres.
Ahanchahak, mis cosas, objetos.
Apanchahak, vuestras cosas (poseedor masculino).
Anchahak, vuestras cosas (poseedor femenino).
Inginchahak, nuestras (cosas femeninas).
Kyelpanchahak, de ustedes (masculinos).
Kyelanchahak, de ustedes (femeninos).

En la oración el substantivo poseedor precede la cosa poseída, y el pronombre viene atrás:

Entzlitz sowu apankuk, literalmente: hombre cuchillo suyo (el cuchillo del hombre).
Kilana wayukya ankuk, mujer olla suya(la olla de la mujer).

DE LOS PRONOMBRES PERSONALES, ETC.

Primera persona singular: *koho,* yo.
Segunda persona singular: *tzliyip* o *itzchip,* tú (masculino); *tzliyi* o *itzchi,* tú (femenino).
Tercera persona singular: *pokentzlitz,* él, literalmente: otro hombre; *moinkilana,* ella, literalmente: otra mujer.
Primera persona plural: *inningko,* nosotros (para ambos géneros).

Segunda persona plural : *kyeltzlinkyip,* vosotros; *kyeltzlinkyi,* vosotras.

Tercera persona plural : *pokentzlitzhak,* ellos; *moinkilanaik,* ellas.

Una particularidad del idioma es que todas las partes de un todo cualquiera, como ramas, hojas, cáscara, tronco, flores, etc., de un árbol, como techo, pared, puerta, etc., de una casa, son femeninas.

Las partes del cuerpo humano son femeninas si son de una mujer, y masculinas si son del hombre.

Los nombres de parentesco son femeninos si son de una mujer, y masculinos si son del hombre. Así, para explicarlo mejor, la mujer tiene *una padre* y *una madre,* pero el hombre tiene *un padre* y *un madre.*

Para todos los objetos que representan una parte de un todo existen pronombres posesivos especiales. Ejemplos :

Mik, mano.	*Mehk,* manos.
E mik, mi mano.	*E mehk,* mis manos.
A mik, tu mano.	*A mehk,* tus manos.
Ap mik, su mano (de él).	*Ap mehk,* sus manos (de él).
A mik, su mano (de ella).	*A mehk,* sus manos (de ella).
Ing mik, nuestra mano.	*Ing mehk,* nuestras manos.
Kyel mik, vuestra mano.	*Kyel mehk,* vuestras manos.
Ap mik, su mano (de él).	*Ap mehk,* sus manos (de ellos).
A mik, su mano (de ella).	*Ing mehk,* sus manos (de ellas).

Una variante de la primera persona del singular es : *koho e mehk* o *e mehk koho,* literalmente : yo mis manos o mis manos yo.

Siguen algunos substantivos pertenecientes a la sección : partes de un todo.

Wa o *woh,* pelo, pluma (plural : *wahak).*
Yispuk, pescuezo y garganta.
Hanhak, espíritus, ánimas (no tiene singular).
Hiphik, hígado.
Hobanchak, sesos (no tiene singular).
Mahak, dientes, espinas (no tiene singular).
Tamnik, rastro, pista.
Tapnik, rodilla.
Waihik, nariz.
Wukmo, estómago (plural : *wukmak).*
Pahak, talón.

Pittik, espalda.
Pinghittek, codo.
Minik, pie, pata (plural: *mankuk).*
Yowuk o *tzlankuk,* muslo (plural: *yiaihak).*
Samkuk o *samkok,* casa.

Nota. — Todos esos substantivos forman su plural suprimiendo la última sílaba, y reemplazándola por *hak : hiphik = hiphak; waihik = waihak; pittik = pithak; samkuk = samhak;* etc.

Hemos visto que los nombres de parentesco toman el género del sujeto poseedor:

Masculino

Abyabam, padre de un hombre.
Apinkyim, madre de un hombre.
Abyata, abuelo de un hombre.
Abyaba, abuela de un hombre.
Abyatzling, hermano de un hombre.
Abyatzla, hermana de un hombre.

Femenino

Ingyaban, padre de una mujer.
Inkyin, madre de una mujer.
Ingyaba, abuelo de una mujer.
Ingyama, abuela de una mujer.
Ingyatzling, hermano de una mujer.
Ingyatzla, hermana de una mujer.

Una mujer, *kilana* (*kilahana o kilhawa,* según las tribus), cuando tiene hijo es designada por *abnaklawa,* substantivo masculino, cuando el hijo es varón, y por *naklawa,* substantivo femenino, cuando la criatura es niña.

El sexo del hijo rige el género de la madre.

Hablando del cacique la mujer emplea el substantivo femenino *aweskié* o *aweski* y el hombre, el substantivo masculino *abawiskié.*

Al terminar la sección del substantivo voy a recapitular los incluídos en ella, cuya pronunciación varía más notablemente entre diferentes tribus: *Nipthana, nihpthahna,* tigre, en algunas tribus se pronuncia *empthana, empthahna; tzlabin,* avestruz varía a menudo en *tzlapin.* Los Sanapanahs dicen *tzlawen,* y he oído decir también *klawen* por indios que venían del sur; otros decían *klabin.*

Tigma, techo o toldería se cambia en *tingma.* La *u* se cambia a me-

nudo en *o tzlapup, tzlapop* (pipa) *samkuk, samkok* (casa) *etnuk, etkuk* (chico de los animales) en *etnok, etkok.*

Apankuk o *apankok, ahankuk* o *ahankok* (suyo, mío) varían hasta entre los miembros de una misma familia.

Kilahana, kilnawa, mujer, hembra; *kilnowu* o *kilnowo,* macho; *yatnatzling, yatnasén,* caballo; *askok* o *askuk,* se usan indistintamente.

Los Lenguas, teniendo entre sí tantas pronunciaciones, no se extrañan cuando un extranjero pronuncia mal una palabra; están tan acostumbrados que ni pestañean al oír el más formidable dislate.

Los Lenguas, no consideran un cadáver como cosa entera, un todo, y por esa razón clasifican ese substantivo *entre las partes del cuerpo.* Por consiguiente, perteneciendo a esta categoría, cadáver es femenino, *abik,* es decir, hablando de un cadáver sin especificar su sexo, cadáver en el sentido genérico.

Pero cuando las partes del cuerpo animal (entre las cuales ellos cuentan el cadáver), pertenecen a un macho, se las indica haciendo preceder esos nombres *femeninos* del artículo *masculino ab* o *ap.*

Abik, cadáver, genérico o de una hembra; *ap abik,* cadáver de un macho.

Abitik, carne, genérico o de una hembra; *ap abitik,* carne de un macho.

Aktik, ojo, genérico o de una hembra; *ab aktik,* ojo de un macho.

Aphehik, dedo, genérico o de una hembra; *ab aphehik,* dedo de un macho.

Atang, boca (puerta); *ap atang,* boca de un macho.

Aktong, brazo o rama; *ab aktong,* brazo de un macho.

DE LAS PREPOSICIONES

Kañi, adentro.

Samchi, adelante de.

Meko, sin.

Naip o *taip,* al otro lado de.

Patzlin, al costado, al lado.

N... (se aglomera a los substantivos que principian con vocal), en, sobre.

Na, antepuesto a substantivos principiando con consonante, en, sobre.

Netin, sobre, arriba, o encima.

Koning, abajo.

Awatzwuk o *atwatzwuk,* adentro (indica estar una cosa dentro de otra).

Nikha, nataka, al lado.

Takhaptzlit, por encima de.

Nibyawa, niyawa, alrededor de. Ejemplos :

> *Netin yamit,* arriba del árbol.
> *Koning tzlapup,* abajo de tierra.
> *Naip watsam,* al otro lado del río.
> *Patzlin tingma,* al lado de la casa.
> *Kañi tingma,* adentro de la casa.
> *Natingma,* sobre la casa.
> *Naptawa,* en la manta.
> *Meko yigmin,* sin agua.
> *Nitzkyiha,* al norte.
> *Nibyiham,* al sur (nótese que sur y frío se expresan por la misma palabra).
> *Ninkitzle,* en la loma, altura.
> *Amai awatzwuk,* en el camino.
> *Yahamet* (1) *atwatzwuk,* dentro de la canoa.
> *Nikha watsam,* al lado del río (en la orilla).
> *Nabaka sangñi,* al lado del estero.
> *Takhaptzlit apawa,* sobre la manta.
> *Niyawa* o *nibyawa itzma,* alrededor del monte.

DE LOS ADJETIVOS

Es difícil separar las partes de la oración en Lengua y de clasificarlas en adjetivos, adverbios, artículos y pronombres, puesto que hay pronombres idénticos con artículos, *preposiciones, adverbios* y *locuciones adverbiales* que son variables tanto en género como en número, según el substantivo al cual se relacionan, y que de hecho se pueden considerar como adjetivos. Nótese que en Lengua las preposiciones, los adverbios y las conjunciones no son invariables como en la mayoría de las lenguas europeas.

Por ejemplo la proposición *takhatzlit,* arriba, es femenina cuando

(1) *Yamit, yahamet,* son formas que difieren según las tribus.

se relaciona con un substantivo femenino, como lo es *tingma,* casa o techo; *takhatzlit tingma,* arriba de la casa. Pero la misma preposición cuando se aplica a un substantivo masculino como lo es *entzlitz,* hombre, toma la forma masculina : *takhaptzlit entzlitz,* arriba del hombre. Es como si en español se cambiara *arriba de* en *arribo de.*

También los adjetivos numéricos adoptan el género del substantivo; hay adjetivos numéricos femeninos y masculinos.

Abkanit entzlitz, dos hombres.
Anit kilahana, dos mujeres.

Pero, ya que el adjetivo numérico indica el género plural, el substantivo queda invariable en lugar de tomar su afijo plural : *hak (entzlitzhak,* hombres).

Ejemplos de algunos adjetivos :

Masculino

Abkyitkyitso, chico menudo.
Apkanto, muy poco.
Pokpowuk, el otro amigo.
Entzlitzhak pokpowuk, hombres amigos (otros que los de nuestra tribu).
Apmehe o *apmiche,* duro, tieso, fuerte.
Aptzlama o *aptzlamo,* todos (vosotros todos).
Aptasé, tahasi, tahasé, bueno, lindo.
Napohak, bravo (estado salvaje), no manso.
Nipsankalwa, zurdo.
Apkyitkuk, chico, joven (de un animal).
Apsamkié, feo, malo.

Femenino

Ekyitso, chica, menuda.
Anto, muy poco.
Mokmowuk, la otra amiga (se emplea como adjetivo).
Gaihé, dura, tiesa, fuerte.
Intzlamktzlowo, todas (vosotras todas).
Intase, intahasé, buena, linda.
Nohak, brava (estado salvaje, no mansa).
Nasankalwa, zurda.
Etkuk, chica, joven (de un animal).
Ingsamkié, fea, mala.

DE LOS VERBOS

He reservado la mención de los verbos hasta el fin de este bosquejo por no poder dar un estudio detenido de ellos; las conjugaciones son tan caprichosas que para hacerlas conocer *in extenso,* se precisaría un enorme lugar del cual no puedo disponer por una parte, y por la otra tengo que confesar, francamente, que estoy todavía en duda de si he encontrado las claves verdaderas necesarias para descifrar el *imbroglio* de los verbos Lenguas. Es en estas circunstancias que resolví no dar reglas sobre las conjugaciones hasta no tener la convicción de haber resuelto satisfactoriamente tantos casos que me son enigmáticos hasta hoy.

Felizmente el conocimiento de los verbos, como lo he dicho más arriba, es accesorio, puesto que, en general, se puede fácilmente eludir su empleo, dada la costumbre de los Lenguas de emplear lacónicamente el substantivo en forma alternativa, substituyendo al verbo, sean entonaciones y gestos, sean afijos y prefijos demostrativos, sean verbos *auxiliares invariables* o locuciones adverbiales como *nak, annoksa, inykhé, kohihak,* etc., que además de traducir nuestros verbos auxiliares *ser, estar* y *haber* o *tener,* encierran virtualmente el concepto de *ver, oír, creer, opinar* y muchas más cosas según los casos ofrecidos. Luego lo veremos detenidamente.

El tiempo de verbo más importante en los idiomas clásicos modernos, el que, por así decir, es el talón del verbo, el infinitivo, no existe en Lengua, lo que no puede extrañar en un idioma sintético, pues el concepto del verbo al infinitivo es demasiado abstracto e indeductible para el entendimiento indio. El talón del verbo, en Lengua, parece ser más bien el participio presente.

Igual como en algunos idiomas de las partes más meridionales de nuestro continente, el gerundio se emplea en Lengua en lugar del infinitivo, del imperativo y del indicativo.

El indio, para advertir a una persona que está en peligro de quemarse, o de mojarse dirá : *Mitkyi,* ¡ quemando ! y *yeseyi,* ¡ mojando !

El verbo, como asimismo el artículo, se suprime cada vez que se puede : la casa es de él, *tingma apankuk* (casa de él); el río está lejos, *tiyepek watsam* (río lejos).

Verbos *auxiliares* que correspondan exactamente a los españoles *ser, estar, haber,* no existen en Lengua; a menudo se reemplaza el

verbo *ser,* por la interrogación *hihaha*. Ejemplo : *yatnatzling hihaha?* puede significar : ¿es caballo? ¿es de caballo que se trata? ¿es caballo que acaba de relinchar? ¿es caballo que hemos visto? etc., según la circunstancia ofrecida. Y la contestación, en la afirmativa, es : *yatnatzling,* caballo, lacónicamente.

Pero como lo hemos dicho antes, hay varias palabras que, sin ser verbos, *pues no tienen ni modos, ni conjugaciones,* tienen su empleo bien determinado, haciendo las veces de verbo.

Voy a enumerar las principales con algunos ejemplos que mejor que las teorías explicarán la diferencia que existe entre ellos.

Nak, es una confirmación de una pregunta alternativa.

Koho hihaha?, ¿seré yo que llaman, que gano, etc.?

Contestación : *koho nak,* yo soy.

Etin hihaha?, ¿es humo, sería humo?

Contestación : *Etin nak,* es humo.

Koho wulahaia?, ¿(soy) yo paraguayo?

Contestación : *Kohonak,* yo soy (paraguayo).

Annoksa. Cuando haya existido alguna duda sobre una cosa que se ha visto, oído, querido, creído, etc., y después que esa duda esté disipada se usa como confirmación : *annoksa*. Ejemplo : se ha visto de lejos un animal en el campo, pero no se pudo distinguir si era caballo o vaca. Aproximándose más a ello, se ve que es vaca. Entonces dice el Lengua : *Waitkya annoksa,* había sido vaca. Otro : entra un Lengua en un almacén, pone su dinero sobre el mostrador y pide un cuchillo y una camisa. El almacenero le dice que su dinero alcanza sólo para comprar uno de los dos objetos. Entonces el Lengua piensa un (largo!) tiempo y de repente con tono resuelto : *Sowu annoksa,* ser, o es cuchillo. (Cuchillo ha de ser lo que quiero.)

Antzloho, se emplea cuando se quiere indicar que no se está bien seguro de una cosa, pero que piensa que es, que es su opinión que una cosa es, pero que no quiere afirmarlo. Ejemplo : un indio encuentra un hueso en el campo, lo alza, lo mira de todas partes y dice *sanach antzloho* : me parece que es (hueso de) ciervo.

Eschi, indica la posibilidad que sea una de dos cosas distintas. Ejemplo : se siente una detonación, el indio dirá : *Enmanga antzloho, takhé eschi anham,* me parece ser escopeta, trueno (puede ser) también.

Inyikhé o *Inyekgehé,* es una forma restrictiva : haber, tener o ser, *pero no mucho ;* ser, *pero no importante ;* existir, estar, *pero no para el que habla ; inyikhé hawhúton,* es, hay, tiene pero no mucha barba : *yigmin inyikhé,* es agua, pero poca : *etin inyikhé* (es humo pero no (se-

ñal) (1) para nosotros. *Kohinak* o *noksa koho.* Ejemplo : *Watsam kohinak,* yo (soy para que sea) un río (el agua que se ve). *Noksa koho piltim,* creo, es mi opinión que es (la) luna (que alumbra).

Kitzlaha o *etzlaha,* equivale a quizá, puede ser. Ejemplo : se divisa en el campo a un hombre que está muy lejos. No se puede distinguir por la distancia si es indio o cristiano, pero como el hombre está dirigiéndose hacia una estancia, el Lengua deduce de esa circunstancia que es algún peón de ella y dice : *wulahahia etzlaha,* quizá (es un) paraguayo.

Antzlola, significa : es sólo, o solamente o es nada más que... *yasikantzlola,* es sal sola; es sal, nada más, o es pura sal.

Ikhawé, negación del verbo *ser; ikhawé entzlitz,* no es hombre.

Maha, indicativo : allí hay, allí está; *watsam maha,* allí está (el) río, ese es el río.

Es muy probable que haya otras palabras, híbridas como las anteriores, que incluyen la idea de *ser,* pero no las he podido encontrar todavía.

Hay que notar que entre esas palabras no hay dos que tengan la misma raíz y, sin embargo, todas encierran la idea, el concepto de ser, estar o haber.

Cuando se quiere determinar exactamente la posición de lugar de dos cosas concretas, una relativamente a la otra, se emplean *ocho palabras diferentes, las que hacen las funciones* del verbo *estar.* Digo *haciendo las funciones,* puesto que cada una va precedida de un artículo definido, y que, por lo tanto, según nuestros conceptos gramaticales deberían llamarse substantivos y no verbos. Para poder clasificar sistemáticamente esas palabras, deberíamos inventar nuevas partes de la oración, pues las que usamos de los idiomas clásicos modernos no dan abasto para el idioma de los Lenguas. Se dan a continuación :

Masculino

1. *Ab yitneyi,* él o aquél está.
2. *Ap kyinmeyi,* él o aquél está.
3. *Ab yinkayi,* él o aquél está.
4. *Ap heyi,* él o aquél está.

(1) Los Lenguas tienen la costumbre de hacerse señales, por humaredas, a grandes distancias ; el color más o menos negro del humo, que saben regular, la duración, el número de las fogatas, la hora en que se hace la señal, son elementos con los cuales se ha establecido una especie de telegrafía, quizá tan vieja como el hombre y, sin duda alguna, de origen prehistórico, y que se usa todavía entre muchas naciones primitivas, telegrafía que permite comunicar con las tribus circunvecinas y con la gente de la misma tribu que está viajando.

Femenino

5. *Ing yitnei,* ella o aquélla está.
6. *Ing kyinmeyi,* ella o aquélla, está.
7. *Ing yinkayi,* ella o aquélla está.
8. *Ing heyi,* ella o aquélla está.

Nótese que esas ocho palabras tienen una raíz común*, eyi.*

Las formas 1 a 4 se usan solamente con sujetos masculinos.

N° 1. *Ab yitneyi,* se emplea para indicar la relación de lugar entre *dos objetos inanimados : yapa ab yitneyi napeyim,* mosca él está en (el) miel.

N° 2. *Ap kyinmeyi,* se emplea entre *plantas y objetos inanimados : yatapaiya ap kyinmeyi namiyit,* ortiga él está en (el) jardín.

N° 3. *Ab yinkayi,* se emplea entre un animal y una cosa inanimada : *yatepiyim ab yinkayi nilwata,* aligador él está en (el) riacho.

N° 4. *Ap heyi,* se emplea entre gente y las cosas sin vida; *entzlitz ap heyi koning tzlapup,* hombre él está bajo de tierra.

Las formas 5 a 8 se emplean cuando el sujeto es femenino.

N° 5. *Ing yitnei,* se emplea entre dos cosas inanimadas : *yasik ing yitnei nawainkya,* la sal está en la olla.

N° 6. *Ing kyinmeyi,* entre una planta y uno cosa inanimada : *yamit ing kyinmeyi namyip,* árbol (ella) está en (el) jardín.

N° 7. *Ing yinkayi,* entre un animal y una cosa inanimada : *waitkya kilahana ing yinkayi itzma,* vaca hembra, ella está en (el) monte.

N° 8. *Ing heyi,* entre gente y una cosa inanimada : *kilahana ing heyi naip tatzla,* mujer, ella está al otro lado (del) fuego.

Nótese que el género del substantivo complementivo no influye sobre el empleo de esos pseudoverbos.

Vale también la pena hacer notar que los verbos siguientes :

Mineyi, desear, querer
Wanchi, poder
Linseyi, acertar,

en lugar de conjugarse con pronombres, se conjugan con los artículos indicativos *ab, ap,* él aquél, e *ing, in, im,* la, aquella. Esos tres verbos son invariables en todas las personas del verbo, y tampoco tienen inflexiones de tiempo.

Entzlitz ab linseyi sanach, el hombre el acertar ciervo.
Kilahana ing mineyi itawosat, mujer ella desear casarse.

CONCLUSIÓN

Por lo visto el Lengua es un idioma bastante complexo, y a pesar de que, como otros tantos idiomas primitivos, carezca enteramente de palabras para los conceptos abstractos bastante rico y preciso; su estudio es interesante, pues a cada paso ofrece originalidades sorprendentes.

No puedo dejar de consignar aquí una opinión que me fuí formando poco a poco. Me parece que el Lengua se compone de una mezcla de dos idiomas fundamentalmente diferentes que se fusionaron en uno.

Es imposible no advertir una cierta dualidad en el fonetismo del idioma de los Lenguas; una parte de sus palabras se distingue por una plétora de consonantes duras, *k, p, t,* y otra parte de ellas se compone solamente de letras suaves, *a, e, i, o, u, yé, yi, b, g, m, n, l, w.*

Compárese el tipo fonético de las dos clases de sonidos en las 40 palabras que siguen :

Ásperas fuertes	Suaves
Pilthem, luna.	*Sangni,* estero.
Pitz patz, arco.	*Amai,* camino.
Pomahap, jabalí.	*Sowa,* langosta.
Niptahna, tigre.	*Sowu,* cuchillo.
Entzlitz, hombre, Lengua.	*Amyaha,* noticias.
Wainkya, olla.	*Lamum,* mostacilla.
Takhé, trueno.	*Yamaiyín,* bolsa de red.
Kasik, cotorra.	*Yamignimasma,* serpiente.
Atitz, escorias.	*Yigmin, igmen, imen,* agua.
Yakteba, zapallo.	*Yamhang,* caraguatá.
Kilyikhama, fantasma.	*Malamang,* boquerón.
Mahaksakma, no hay.	*Malengyi,* esconder.
Aksak, cosa.	*Yumis,* sudor.
Askuk, insecto, bicho.	*Mineyi,* desear.
Tzlapup, pipa, tierra.	*Linseyi,* acertar.
Apankuk, tuyo, suyo.	*Nime,* seno, pecho.
Ahankuk, mío.	*Yeseyi,* mojar.
Koning, abajo.	*Maihayi,* bostezar.
Kanyi, adentro.	*Yehayi,* girar.
Kyeltzlingkyip, vosotros.	*Wumeyi,* llorar.

No cabe duda que el carácter fonético de esas palabras es muy distinto; parece que ellas hayan sido tomadas de dos idiomas diferentes.

Quizá mi sugestión impulsaría a investigaciones que podrían llegar a resolver el enigma, y como vive aún entre los Lenguas la leyenda de su invasión en el Chaco cuando llegaron del norte, no es improbable que uno de los tipos fonéticos proceda de los invasores, y el otro del idioma de los vencidos.

Y al terminar este rápido bosquejo, repito lo dicho al principiarlo: no entró en mi plan, ni podía entrar en ello, dar una gramática metódica y completa, sino sencillamente un ligero esbozo que permitiera al lector formarse una idea aproximativa de la lengua de los Lenguas.

VOCABULARIO DEL IDIOMA LENGUA

A, pron. pos., tu (de ti), tuyo. Ejemplo: *amek* = tu mano.

Ab, ap, art. def. m., el; también pron. pos. del, y pron. personal, tu.

Abaktzlik, s. f., cabo (de hacha, de martillo).

Abatang, s. f., puerta, entrada, boca (de un valle, de un río), boca (parte del cuerpo animal).

Nota. — La primera sílaba de ese vocablo no es otra que el artículo definitivo *ab,* el cual, en este caso, como en muchos análogos, es inseparable del substantivo, con el cual, a pesar de ser masculino, viene a formar substantivos femeninos.

Abhangag, s. f., fantasma (de un animal).

Abik, s. f., cadáver.

Abitik, s. f., carne.

Abyoha, s. m., estrella; ver *yoha.*

Akeyi, v., estar, que se emplea únicamente para definir el lugar que ocupan dos o más personas, relativamente. Ejemplo: *Juan abkeyi kitohop Pedro* = está cerca de (junto con) Pedro.

Abkyibitiz, s. f., asta, cuerno; plural: *knibitak.*

Abkyinmeyi, v., estar. Se emplea únicamente para definir el lugar que ocupan, relativamente, dos o más plantas. Ejemplo: *sappu koning abkyenmeyi yamyamit* = (la) mandioca abajo está (del) lapacho.

Abwatzwuk, s. f., cuarto interior de una casa.

Abwatzwuk, prep., en. Ejemplo: *samkuk abwatzwuk* = en la casa.

Abyihotzmai, s. f., doctor, hechicero (ver *yihotzmai).*

Abyingminata, s. f., caldo (ver *ingminata).*

Abyitneyi, v., estar. Se emplea exclusivamente en la tercera persona del indicativo, singular y plural, para indicar la relación de lugar entre una cosa, un objeto inanimado femenino y otro de cualquier género, pero también inanimado. Ejemplo: *abik abyitneyi atang awatzwuk* = (el) cadáver está cerca de la puerta.

Abyoha, s. m., estrella; ver *yoha.*

Abyiham, s. m., el sur, o viento del sur (ver *yiham).*

Abnenyik, s. f., pecho de un animal macho.

Abnaklawa, s. f., mujer que tiene un hijo varón (ver *naklawa,* mujer que tiene hija). Se aplica *abnaklawa* a los animales. En ese caso indica que tiene cría, cualquiera sea su sexo. Ejemplo: *waitkya naklawa* = vaca con cría.

Abkyinkayi, v., estar. Se emplea únicamente para indicar el lugar donde está un animal relativamente a otro animal. Ejemplo: *waitkya abkyinkayi kitohop yanatsen* = (la) vaca está junta con el caballo.

Abkyipminik, s. f., raíz; plural: *kyipminik.*

Abmatneyik, v., estar muerto (haber sido matado).

Abmewa, s. m., águila, buitre.

Ahanchahak, pron. pos. plur., míos, mías (mis).

Ahankuk, pron. pos. sing., mío, mía (mi).

Aiyin, s. f., bolsita oblonga, en punto de red, que se lleva en la cintura, en la cual llevan los Lenguas cuantas chucherías poseen: fósforos, eslabón, agujas, hilo, espoletas, cuchillo, etc.

Abwischi, s. f., jefe, patron, cacique.

Nota. — Es femenino cuando habla un hombre, y masculino cuando habla una mujer (ver *owiski, wiski, owiskyé).*

Ak, terminación que indica el plural de los substantivos. Ejemplo: *entzlit* = hombre; *entzlit ak* = hombres.

Aknem, s. f., el sol (astro).

Aksak, s. f., cosa, objeto, persona.

Akselyatiktama, s. f., naranja. Algunas tribus dicen *seyaktikton.*

Aksik, aktik, s. f., ojo.

Akyembetek, akyembitik, s. cuero curtido.

Almen, s. f., caña, aguardiente.

Almen angehak, adj., ebrio.

Alop! interj., ¡tomad!

Amai, s. f., camino.

Amtansahnak, adj. num. cardinal, dos.

Amyaha, s. f., noticia, novedad.

Amyep, s. f., quinta, chacra, capuera, jardín. Se dice también *amyip.*

Anaig-hi, v., hacer.

Anchahak, pron. pers. f. pl., de ellas.

Anet, adj. num. cardinal, tres.

Aneya, inyinkuk, s. f., corazón.

Annoksa, loc. adv. Una de las palabras de la clase definida bajo *nak* (ver esa palabra). Se emplea para indicar una resolución repentina, después de un corto momento de indecisión. Ejemplo: Si después de entrar en un almacén, dudo si compraré un cuchillo o una hacha, me decido en comprar una hacha, diré: *poté annoksa!* = es *últimamente* un hacha lo que quiero comprar.

Anha, conj. y adv., también, igualmente.

Ankuk, pron. pos. f., de ella.

Antzlola, adj., solo, sola; único, única.

Antzloho, loc. adv. Una de las voces indicadas bajo *nak* (ver *nak).* Se emplea para expresar dudas respecto a cosas indefinidas. Ejemplo: Siento una detonación lejana, pero no puedo distinguir si es trueno o arma de fuego. Entonces diré: *emmanga antzloho* = es (probablemente) escopeta.

Ap, art. def. m., él.

Apankuk, pron. pos., de él, del.

Apasahó, v., mandar, hacer traer.

Apawah, s. m., sábana, manta, poncho.

Aphetik, s. f., dedo de la mano o del pie.

Apkyahé, v., estar carneando.

Apok, s. f., huevo.

Apopaih! Interjección de admiración o de sorpresa.

Appipma, s. f., mozo mayor de edad (púber, núbil).

Aptapitzmik, s. f., aceite, grasa, sebo de un animal macho.

Aptzlamok, adj. f. pl., muchas.

Aptzlapok, adj. m. pl., muchos.

Aptawa, s. m., esposa. Adquiere el género masculino porque es masculino el poseedor.

Aphanchahak, pron. pos., de ellos.

Apyingminik, s. f., leche, miel, líquido. Variante: *ingminik.* Leche de vaca = *waitkya ingminik.*

Aptkatik, s. f., cabeza de gente o de animales de ambos sexos; pl.: *apkatkuk.*
Askok, s. m., bicho, insecto, animal.
Askyihé, adj., agrio, feo, doloroso.
At, s. f., cara, faz, rostro, semblante.
Atang, s. f., boca, puerta (ver *abatang).*
Atitz, s. f., escoria.
Atzla, s. f., palmera *(Copernicia cerifera).*
Atzta, adv., ayer.
Atzkuk, s. f., lengua (parte del cuerpo).

Baskamkam, s., una clase de hormigas.
Bobyit, s., venado del monte.
Byiham, s., invierno, viento frío del sur; *pobyiham* = el invierno próximo venidero.

E, pron. pos., mi. Ejemplo: *emek,* mi mano.
Ebagyik, s. f., cola de un animal hembra (vaca, yegua, perra, etc.).
Empehik, s. f., piel, cutis, cuero, corteza. Variante: *yempehik.*
Ehma, s. f., sangre.
Ekinateng, s., pava del monte *(crax alector).*
Ektong, s. f. brazo (parte del cuerpo humano).
Ekyitso, adj. f., chica, menuda.
Elek, v. llevar, sacar, quitar una cosa del lugar donde está.
Eliknahakla, s., campana, cencerro.
Elyanmomatzchitzla, s., almacén.
Elyowahakuk, s., mula.
Elyowaktik, s., lechuza.
Emanang, s. f., saliva de una hembra.
Engkyi, enkyi. Afijo que, añadido a un verbo, le da una idea de movimiento o de continuación. Más o menos como el gerundio de los verbos castellanos: comiendo, escribiendo. Ejemplo: *essiemenkyi,* viniendo sin pararse en el camino; *yitnengkyi* = dar fruta sin interrupción.
Enmanga, s. f. escopeta, fusil, carabina.
Entzlit, s. m., hombre.
Ephehik, s. f.
Eschi, loc. adv. La cuarta palabra de las definidas bajo *nak* (ver *nak).* Se emplea para expresar dudas respecto a la causa de algún suceso, etc. Ejemplo: Estoy viendo humo en el horizonte, pero a mi parecer podría ser tanto el humo resultante de una que-

mazón, como quizá nubes que se levantan. Entonces diré : *etin antzloho, yiphupahia eschi anhan* = creo (que es) humo (sin embargo) nubes pueden ser.

Esiksik, s. f., corazón del árbol. Variante : *yesiksik.*

Essyem, v., venir.

Etan, eto, v., comer.

Etin, s. f., humo.

Etsiksik, s. f., copa, cabeza de un árbol. Variante : *yitsiksik.*

Etkuk, s. f., femenino de *kyitskuk,* corderito, potrillo, cría joven de cualquier animal; pl. masc. : *kyitkowuk ;* pl. fem. : *etkowuk.*

Etkya, s. f., hija o hija (como *kind* en alemán y *enfant* en francés).

Etzlaha-kyitzlaha ! interj., ¡ quizá ! ¡ ojalá !

Eyatzmanatzla, s. f., plaza, mercado.

Eyemehé, v., esperar. Variante : *yemaheyé.* Ejemplo : *yemaheyé* o *eyemehe kitsoho* = espere un poco.

Gewa, s., víbora, serpiente. Nombre genérico.

Gewa-anko, s., víbora cascabel.

Guanowoh, guadnowo, adj., grande, mucho.

Hah ? int., ¿ qué ? ¿ cómo ?

Hamtik, s., filo de un cuchillo.

Hamtyeyi, adj., filoso.

Hapkuk, s. f., lomo, espalda, hombro de un macho. Para designar la misma parte del cuerpo de una hembra se dice : *hakpuk.*

Hatzla, s., cercado.

Hatzla igwangan, s., potrero.

Hatznankuk, adj., nuevo.

Haté, s., calor.

Hawhaton, s. f., barba, bigote.

Haweyi, v., esconderse.

Hehemok ! v., imperativo de *hehe,* irse ; váyase, vete.

Heksa, v., salir.

Hená, hehená, s. f., tabaco.

Hikhik, s. f., hígado. Variante : *hiphik.*

Hobankuk, s. f., seso.

Holyapkatkiohapuk, s., arroz.

Hopenyamit, s., cercado, alambrado.

Hotzlikaiyi, adv., largo, alto.

Howritzlahawa, s. f., vecino.

I, art. det. fem., la. Sus formas eufónicas son: *ig, ik, im, in, ing* e *ink.*

Igmen, s. f., agua. Variante: *yigmen.*

Igminasma, s. f., serpiente acuática.

Igpanma, s. f., vapor, neblina, niebla.

Ikhak, s. f., costilla.

Ikhawé, verbo de forma negativa = no es. Existe sólo este tiempo, sin conjugación alguna. Precediendo un substantivo, le presta el significado negativo. Ejemplo: *ikhawe sobyit* = no es venado (lo que vemos, que vimos disparar, etc.).

Ikho, s. f., junco, enredadera, estera.

Ikpitzwuk, s. f., aceite, grasa, sebo (del cuerpo de una hembra).

Ikpung, s. f., caracol.

Ikton, s. f., día (un sol), es decir, el lapso de tiempo entre la salida y la entrada del sol. *Ik* es el artículo definido femenino, que es inseparable de la sílaba terminal.

Iktopili, s. f., especie de hormiga negra.

Ilwata, s. f., riacho, riachuelo.

Imohowok, inmowuk e *ingmowuk,* s. f., amigo.

Im, in, ing e *ink,* formas eufónicas de *i,* pron. pers., ella. *Ing* es también pron. pos. primera persona plural, nuestro. Hay que notar que esta voz es igualmente artículo definido (ver *i*).

Ingman, s., bañado, tierras bajas, anegadizas.

Inginkuk, pron. pers. f., nuestra.

Ingkyin, s. f., madre (mi madre).

Ingyilpa, s., lodo, fango, barro.

Inningko, pron. pers. m., nosotros.

Insakkyaha, s. f., niño.

Inye, adv. de lugar, afuera.

Inyikgehë, loc. adv. La quinta voz de las indicadas bajo *nak* (ver *nak*) y que se emplea para indicar que la cosa de que se está hablando existe, pero con ciertas restricciones. Ejemplo: si un hombre tiene barba pero *no muy tupida,* el Lengua dirá: *inyikgehe hawhaton* = tiene barba, pero no mucho (no tupida). Otro: si en una casa donde me encuentro llega una visita diré: *mainkyaha inyikgehé* = visita, pero no para mí.

Inyitneyi, v., estar. Se usa únicamente a la tercera persona del indicativo presente singular, e indica la posición de lugar relativamente una a otra. Ejemplo: *hena inyitneyi samkuk.*

Ipmewa, s. f., puma, león americano *(felis concolor).*

Isaksa, v., llevar (una cosa a alguna parte).

Isamtaha, v., traer. Ejemplo : *isamtaha yanatsen etkuk* = traiga el potrillo.

Ispo, s., cigarro.

Itawa, s. f., esposo. Es femenino porque la poseedora lo es también. La sílaba *i* es el artículo femenino *la,* que es inseparable de las dos siguientes, las que adquieren su significado sólo por la adición de la *i*. *Tawa* separado de la *i* no tiene significado alguno.

Itnamuk, s. f., flor.

Itzchaik, adv., recién.

Itzma, s. f., bosque, selva.

Itzowai, v., morir.

Itzyemip, s. f., bosquecito, islote de arbustos.

Itzchipuk, s. f., pierna.

Iwoksa, v., buscar; ir a traer; ir en busca de.

Kames, s. f., gato.

Kamuk, s., una planta de los esteros (guaraní : *peguahó).*

Kañi, prep., adentro, dentro.

Kapuk, ver *hawpuk.*

Kasik, s., cotorrita.

Kihahas! interj., ¡ no sé ! ¡ quien sabe !

Kil, pron. pers. tercera persona plural m., ellos. Es de empleo limitado a unos pocos verbos.

Kilaikyi, s., poroto.

Kilana, kilahana, kilnawa, s. f., mujer, muchacha, hembra.

> *Nota.* — Las tres formas ortográficas están en uso en la misma tribu, y es harto difícil saber cuál de las tres es la más correcta.

Kilanetkuk, s. f., moza, doncella, muchachita.

Kinating, s., especie de faisán (guaraní : *yaku karaguata).*

Kilasma, s. f., pescado (nombre genérico).

Kilyikhama, s. f., fantasma, espectro, demonio.

Kitohop, prep., cerca de, junto con. Traduce bien el *chez* francés.

Kitsoho, adj., pequeño, chico, un poco, un rato. Esta voz es invariable.

Kitzlé, s., loma, altura, colina.

Klabin, klawehn, s., avestruz.

Kladnowo, s., plumero hecho de plumas de avestruz.

Koho, pron. pers. primera persona singular, yo.

Koinak, v., estar. La sexta palabra indicada bajo *nak* (ver *nak*). Con ella se expresa cualquiera impresión, eludiendo toda afirmación. Ejemplo: estoy pensando que puede estallar un temporal porque la atmósfera, etc. Entonces traduciré esa impresión por estas palabras: *takhé koinak* = creo que, es fácil, probable, que va tronar.

Koning, prep., abajo, bajo de. Ejemplo: *tingma koning* = abajo del techo.

Koning maktik, s., paloma silvestre.

Ksahata, adj., más.

Kyaiya, s. m., fiesta de los indios Lenguas en que se festeja las estaciones del año, y en la que bailan únicamente los hombres.

Kyatwashama, s., lámpara.

Kyasok, pron. relativo, que, quien. Ejemplo: *kyasok itzowaihia* = quien murió.

Kyatim, s., tía.

Kyel, pron. pos. segunda persona del plural, vuestro. También pron. personal: vosotros. ustedes.

Kyelanchahak, pron. pos. pl., vuestros.

Kyelanhak, pron. pos. sing., vuestro.

Kyeltzlinkyi, pron. pers. segunda pers. pl. del fem., ustedes (señoras).

Kyeltzlinkyip, pron. pers. segunda pers. del pl. masc.

Kyemomap, s., sobreviviente.

Kyiha, s., norte (punto cardinal).

Kyim, s. f., madre (ver *inkyim*).

Kyinham, conj., y; adv., también, igualmente.

Kyisniai, s., pajarito de la familia de los pinzones.

Kyipning, kischahma, s., poste, horcón.

Kyitkischhana atan, s. f., llave de puerta.

Kyitkuk, s., muchacho, mozo (ver *etkuk*).

Kyitkya, s., hijo, hija. Corresponde a la voz *enfant* en francés.

Kyitzkatzlik, s., gato montés.

Lamon, lamum, s. f., mostacillas.

Lanaip, s., venadillo (*Cervus campestris* Cuv.).

Latsehe, s., maíz.

Lolach, s. f., pescado parecido a anguila que tiene aparato respiratorio para el aire y el agua (*Lepisidoren paradoxa*).

Linseyi, v., acertar.

Liyenhekok, s., mono (*mirikina*).

M... ma, makyi... ma, partículas negativas. Ejemplo: camino = *amai. Mamaima* = no hay camino. Cuchillo = *sowu. Makyisowuma* = no hay cuchillo.

Maha, v., hay. Ejemplo: *tatzlamaha* = hay fuego.

Mahak, s. pl., dientes. El singular de este substantivo no existe.

Maihaiyi, v., bostezar.

Maikinkyakhak, estar muriéndose de hambre.

Maikyaha, s. f., visita; persona que está haciendo visita.

Makhak, v., matar.

Makhitkyi, v., cocer, cocido.

Maksama, adv., contracción de *aksak,* cosa, y la negación *m... ma* = no hay, no está. Es la forma absoluta de la negación.

Malamang, s., boquerón, abertura entre dos montes.

Maling, v., esconder, ocultar.

Malingaskuk, pique (pulga penetrante). Literalmente = bicho que se oculta.

Mamhah, s., buitre, carancho.

Mumyi, prep., adelante, delante de.

Mascheyi, v., dormir.

Maskahi, adj., frío.

Matneyi, v., morir.

Matzla, adj., igual.

Matzlimpinik, s. f., mejilla.

Matzlik, s., hoyo hecho en la tierra.

Mek, s. f. pl., manos.

Mekkoho, v., dar. Literalmente: mis manos, ponga en mis manos.

Meko, prep., sin; adj., falto de.

Menang, s. f., palosanto. Madera verde aromática.

Mepup, s., murciélago.

Mentzlitma, loc. negativa; pron. indef., nadie. No hay, no está nadie. Literalmente *entzlit* = hombre, intercalado entre las partículas negativas *m... ma.*

Mewa, s. m., águila.

Mik, s. f. sing., mano.

Miktiking, s., pato negro.

Mimasma, s. f., una clase de serpiente.

Minik, s., pie.

Minme, s. m., especie de escoplo con cabo largo de un metro que usan los Lenguas para sacar el cogollo de las palmeras.

Mischéh, s., pulga.

Mitamang, s. f., piedra.
Mineyi, v., desear, querer (hacer una cosa).
Mitzneyi, adj., caliente.
Mitkyi, v., quemar.
Mohayi, v., silbar.
Mok, adj. f., otra. Algunas veces pierde la *k* final en la composición de palabras compuestas. Ejemplo: *moinkilahana* = la otra mujer.
Mopaiyi, adj., blanco.

N... partícula que, puesta ante de un substantivo que principia por una vocal, corresponde a la preposición castellana *en.* Ejemplo: *natzma* = en el monte.
Nabakha, s. f., costado, pedazo, parte de un macho.
Nabakha, s. m., muralla, pared.
Nabakta, s. f., plural de *nabat* (ver *nabat).*
Nabat, s. f., cara, de cualquier ser animado macho (ver *nahat).*
Nabenetik, s. f., nuca de un macho.
Nahakta, s. f., plural de *nahat* (ver *nahat).*
Nahat, s. f., cara de cualquier ser animado hembra (ver *nabat).*
Nahatlop, prep., atrás.
Nahem, s. f., oso hormiguero (ver *naiyem).*
Nahek hehak, v., tener hambre.
Nahno, adv., antes.
Nahta, adv. superlativo de antes (mucho antes).
Naiksikso, s. f., centro; media res de una hembra.
Naikuk, s. f., oreja, oído.
Naip, taip, prep., más allá; al otro lado de...
Naiyim, s., oso hormiguero (ver *nahem).*
Nak, v. Palabra que difícilmente se puede clasificar entre las partes de la oración. Sin ser verbo propiamente dicho, puesto que no tiene conjugación, *nak* indica el estado de ser, estar. Existen en el idioma Lengua varias palabras semejantes que tienen entre sí matices muy sutiles. *Nak* se emplea para quitar una duda. Ejemplo: Oigo que mi jefe, en un cuarto adyacente, está llamando a alguien, pero no comprendo lo que dice. El jefe repite su llamada y recién comprendo que es a mí que llamaba. Entonces, alejada la duda diré: *nak koho* = sí, *era* a mí (que llamaba).
Nakta, s. pl., mercaderías, trastes, efectos.

Naltawa, s. f., hombro, espalda de una mujer.
Namankuk, s. f., ubre; pecho de una hembra.
Namuk, s. f. (pl. *namka),* palo borracho; *Lamuhu* (en guaraní). Da una hebra sedosa, el *kapok* del comercio.
Nanetik, s. f., nuca de una hembra.
Nanmaktlipto, s. f., cocina.
Napkat, s. f., candelero.
Napohak, adj., bravo, serrano, en estado silvestre.
Napnaksehe, s., armadillo, tatú.
Napnikting, s. f., rana.
Napotzling, s. m., tapir, anta *(Tapirus americanus).*
Nasankaha, s. f., zurda.
Nata, s. f., ave, pájaro (nombre genérico).
Nata, s. m., tortuga (especie pequeña).
Nataka, prep., al lado. Ejemplo: *Nataka samkull* = al lado de casa.
Natingina, s. f., pueblo, ciudad.
Natzlapup, loc. adv., a pie. Ejemplo: *entzlit tylama natzlapup* = hombre que viaja a pie.
Natzlit, s. f., cintura, talle de una mujer; mitad (de una res hembra).
Natzwa, s., monte, selva.
Nawuk, s. f., vulva.
Nelanantatzlama, s. f., espejo.
Neng, forma eufónica del art. fem. *ing.*
Nengat, s. f., la cara (la partícula *neng* es forma eufónica de *ing,* la). Las dos sílabas de esa voz son inseparables; la segunda de ellas, *gat,* desprovista de su afijo *neng,* no tiene significación alguna.
Nengyebik, s. f., la nuca, hablando en general, sin indicación de sexo.
Nengyik, s. f., el pecho (como arriba).
Netin, prep., sobre, arriba.
Niblitana, s. f., hombro de un macho.
Nibigawa, prep., alrededor, al lado de (una hembra).
Nibizawa, prep., alrededor, al lado de (una hembra).
Nibwa, s. f., mojinete de una casa.
Nibwa, s. f., extremidad.
Nibyawa, niyawa, prep., alrededor de...
Nibyesikso, s. f., centro, el medio; media res de un macho.
Nikha, prep., al lado de... Ejemplo: *tatzla nikha* = al lado del fuego.
Nikha, s. f., costado, pedazo, parte de una hembra.
Nimankuk, s. f., pecho de un macho.

Nimpawa tzlankuk, s., iglesia.
Nin, nim, ning y *nel,* prep. pers. primera persona pl., nosotros.
Nintzlino-itzino, s. f., compañero de viaje.
Nintzlit, s. f., talle, cintura (parte del cuerpo humano).
Nipkyesik, s. m., oveja.
Nipsankalwa, s. f., zurdo.
Niptana, niptchanah, emptchana, s., tigre, jaguar *(Felis onça).*
Ejemplo: *Niptana apkyakhe* = (el) tigre está matando.
Niptamin, prep., atrás, tras de... después de...
Niptlitz, s. f., cintura, mitad, medio (de un macho).
Nohak, adj., bravo, serrano; en estado silvestre.
Noksa koho, v., sinónimo de *koinak* (ver *koinak).*
Nokso, interj., ¡ de veras ! ¡ cómo no ! ¡ cierto ! ¡ verdad !
Nowokknekha, adj. num. card., cuatro.
Nyakha, v., matar.

Ohak, s. f., tronco.
Owischi, s. f., *oweskyé, owiskyé,* cacique (ver *wischi).*

Pahak, s. f., talón (parte del cuerpo humano.)
Pahat, s. f., pasto, yerba, yuyo.
Puleyi, v., caer.
Paihaiyé, v., desparramar.
Paihya, s., mosquito.
Pana, s. m., garza mora.
Panakteh, s. m., planta, nombre genérico.
Pankatzwa, s. m., hoyo en la tierra, en el campo.
Papa, pahapa, s. m., cera de abejas.
Papatatzla, s. m., vela de cera.
Patik, s. f., cabeza.
Patneikyi, v., hablar.
Patzlin, prep., al lado de...
Pawaschama, s. m., instrumento de música (de los Lenguas.)
Peheyi, s. f., batata.
Penyet, s., raya (pescado).
Peyem, m., abeja, miel.
Piltim, piltin, s. m., luna.
Pineyi, adj., derecho, derecha.
Pimhit, s. m., arco iris.
Pingkilik, s. f., codo.
Pinik, s. m., especie de sapo.

Piskap, s. m., especie de mosca.
Pittik, s. f., paleta.
Pitzpatz, s. m., arco (arma).
Pitzya, s. m., pico (pájaro trepador).
Pitzyingkyi, s. f., una clase de hormigas.
Piyim, s. m., iguana (lagarto).
Pobyiham, s., el invierno próximo venidero.
Pok, adj. m., otro, otro más.
Pokentlitz, pron. pers., 3ª persona masculino plural. Ellos ver *mokinkilana* = ellas. Literalmente, otros hombres, otras mujeres.
Pomap, pomahop, pomohop, s. m., jabalí.
Pomapehe, s. m., lagarto (nombre génerico).
Pomoho, s. m., laucha.
Poté, s. f., hacha.
Puk, ver *apok.*

Sabwam? pron. interr. ¿Cuánto? ¿cuánto es? (que vale) ¿Cuántos? (años tiene), qué tamaño, etc.
Sabwisahia? pron. interr. ¿Cómo se llama? ¿A qué grupo, nación, tribu, especie, pertenecen ellos, ello? Se aplica sólo a sujetos masculinos.
Sagwam, adv. de cantidad que se aplica sólo a sujetos masculinos. ¿Cuánto, cuántos son, de qué edad son ellos, etc.?
Sahama, s. f., pirisal (estero donde crece una umbelífera llamada *piri* en guaraní *(Papirus).*
Sakmahak? femenino de *sapmahak,* pron. interr., ¿qué hacen, qué dicen, adónde van, etc., ellas o ella?
Saktaha? pron. interr., ¿qué dijo, hizo, dió, vió, etc., ella o ellas?
Samki, samkyé, adj., malo, feo.
Samaneyi, s., sandía (fruta).
Sanach, tzlanach, tzlenach, senach, s. m., ciervo *(Cervus paludosus* (Cuv.).
Sapnik, s. f., rodilla.
Sapmahak? adv. interr. ¿Adónde? Se aplica únicamente a nombres masculinos. *Sapmahak Juan?* ¿Dónde está Juan? ¿Adónde se fué, dónde se ha visto, etc.?
Sappu, s. f., mandioca.
Saptaha? pron. interr. ¿Qué dice, qué quiere, qué dijo, qué resuelve usted? ¿Y después?
Seliplik, s. f., mariposa.
Selpiktenwaptzlankuk, s. f., guardia, cuartel.

Selpikletomo, s. m., soldado.

Selpiketomatzla, s. f., cárcel, prisión.

Semeheng, simhing, s., perro.

Seyatekton, seyatikton, s., naranja, ver *akselyaktama.*

Simpehe, s., mosca, tábano.

Senhik, s., perdiz.

Siganah, s. f., cigüeña.

Sigwisahia, loc. adv., ¿cómo se llaman ellas, ella?

Sinsap, s., picaflor.

Siktahama, s. f., cama (la cama que ocupo yo).

Singheyi, s. f., zapallo (especie óvala).

Singkinmitz, s., garrapata.

Sonsinghé, s. m., bolsita en punto de red.

Sowa, s. m., langosta.

Sowokemehek, adj. num. cardinal, diez.

Sowu, sowo, cuchillo, hierro.

Tahak, s. f. pl., cenizas (ver *tahap.)*

Tahanama, s. f., cama.

Tahap, s. f., cenizas (ver *tahak.)*

Tahapkyié, adj., podrido, fermentado.

Tahase, tahasé, adj., bueno, lindo, bonito.

Tahasesamak, s., lápiz.

Tahawe, s., loro, papagayo.

Takhaptzlit, prep., sobre, arriba, encima de... Ejemplo : *takhaptzlit apawa,* sobre la manta.

Takhatzpup, s. m., tumba, sepulcro.

Takhé, s. m., trueno.

Tama, s. f., piola, cuerda, soga.

Tama, adv. num. card., uno,

Takmatkyi, v., acalambrarse, adj. acalambrado.

Tamatzlipto, s., comedor.

Tamup, s., tapera (lugar que fué habitado en un tiempo, pero que está abandonado ahora). Toldería abandonada ; ruina de una casa, plural *tampa.*

Tapnik, s. f., rodilla (ver *sapnik).*

Tappu, s. f., junco (planta acuática).

Tataha, s. f., gallina.

Tatzla, s. f., fuego. (Compárese *tata* guaraní.)

Tawa, s. f., hachita.

Tawa, s. m., persona casada (ver *itawa* y *aptawa*).
Tehyepé, adj., lejos, variante : *tiyipek.*
Tentyihé, v., dormir.
Timpilo, s., chajá (ave del orden de los zancudos.)
Tigma, tingma, s. m., casa, techo.
Tipkyi, v., bajar; salir.
Tittlit, s. f., espátula (ave del orden de los zancudos).
Tiyacham, s. f., almohada.
Tiyninkyatahk, adj., estar muerto de sueño.
Tiyinmatzla, s., dormitorio.
Topill, s. f., una clase de hormigas.
Towu, s. f., algarrobo, árbol *(Prosopis dulcis).*
Tz, consonante cuya pronunciación es idéntica con la *th* inglesa.
Tzlak, adv., ayer (ver *atzta.)*
Tzlabin, s. f., avestruz (ver *klabin.)*
Tzlanach, tzlanak, s. f., ciervo *(cervus paludosus,* (Desm.). Ver *Sanach.*
Tzlapup, s., tierra, barro. Más particularmente caolín, pipa, cigarro.
Tzlatahak, s. f., cuerda de arco.
Tzlimpinik, s. f., ala, plur., *tzlampankuk.*
Tzlinkyi, v., ir, irse.

W, esta consonante se pronuncia como en alemán y en holandés.
Wah, s. f., cabellos, pelo, plumas, plural *wahak.*
Wahwoh, s. f., lobo de clinera *(canis jubatus)* que vulgarmente llaman zorro grande.
Waihik, s. f., nariz.
Wainkya, s., tambor. También cierta fiesta de los Lenguas durante la cual no paran de tocar el tambor y cuyo objeto es el de festejar la nubilidad de una muchacha.
Wainkya, s. m., olla.
Waitkya, s. f., animal vacuno, nombre genérico de los vacunos.
Waitkyahek, s. f., carta, libro, papel, periódico, etc. Esa palabra significa literalmente cuero de vacuno. No he podido averiguar el origen de esa denominación.
Waitkya inkilawa, s. f., literalmente : vacuno la mujer = vaca.
Waitkya kilnowo, s. f., toro. Literalmente : vacuno el macho, toro.
Waitkya yankilwano, s. f., novillo, buey, vacuno castrado. Literalmente : vacuno como el macho.
Waitkyantkuk igmenek, s., leche.
Waitkya tzlankuk, s. f., corral.

Waksokmé hemek, adj. num. cardinal, cinco.
Wanchi, wankyé, v., poder.
Wanchik aniyaha, v., eres un mentiroso, mientes.
Wanhé, adj., mucho.
Wanto, v., caminar, ir, marchar. *Wah!* ¡vamos!
Watsom, watsam, s. f., río.
Watzwa, s. m., cantarilla.
Watzwuk, s. f., interior del cuerpo humano.
Wenak, wehnak, winak, s., una clase de cigüeña.
Wischi, wiskyé, s. f., cacique, ver *owiskié.*
Wulahaya, s. f., extranjero, más particularmente el paraguayo; se dice también *volahaya.*
Wukmahak, s. f., estómago.
Wukma, s. m., joven, mozo, mancebo.
Wuneyi, v., llorar.

Y, esta letra es siempre consonante en Lengua, y se pronuncia como en la voces castellanas : yacer, ya, yo, yugo, yeso, etc.
Yabam, s. f., padre. *Nota* : todos los nombres de parentesco son femeninos.
Yabakmatzheyi, adj., verde, azul.
Yag gewa, s. f., víbora de la cruz.
Yagnimasma, s. f., serpiente que vive en el agua.
Yahaha, s. f., ave de la clase de los zancudos.
Yahamet, yahamit, s. f., canoa hecha de un solo tronco de árbol, piragua. (En el Paraguay *cachiveo.)*
Yama, s. f., abuela.
Yamhayin, s. f., bolsa de red grande.
Yamhang, s. f., caraguatá (una bromeliácea).
Yamilkyit, s. f., fuente, pozo de agua.
Yamet, s. f., árbol, nombre genérico.
Yammatzl, s. f., palmera dátil. Literalmente = como la palma.
Yamhotkyi, adj., flaco, delgado.
Yammaling, s., zorro. Literalmente : como (uno que) se esconde.
Yammanak, s., una especie de bambú : caña de Castilla.
Yamnatiklik, s., pimienta.
Yampohat, s., caña dulce (la planta).
Yamsowu, s. f., plata u oro. Literalmente : como el hierro.
Yamyamit, s. f. lapacho (árbol).
Yamyasik, s. f., sulfato de quinina. Literalmente = como la sal.

Yan, y sus formas eufónicas : *yam, yang, yin, yim* y *ying,* son prefijos que añadidos a substantivos *femeninos* constituyen un término de comparación. Ejemplo : sal = *yasik* y *yamyasik* = quinina; *pahat* = pasto, gramínea; *yamhapat* = caña de azúcar.

Yancha, s. f., flecha.

Yangkatzchi, adj., agujereado, gastado.

Yanhamok, s., *Samuhu* (árbol).

Yankyesha hatek, s., gato montés.

Yanpatek menhek, s., azúcar.

Yansomokyek etkuk, s., lobo de río chico.

Yansingheyi, s. f., zapallo grande, largo.

Yantikhamek, yantekomek, s., buque a vapor de ruedas. Literalmente : como mis manos.

Yantomaneyi, s., melón.

Yaksinahak, prep., adelante de...

Yakteba, s., zapallo chico, redondo.

Yakwackyk, adj., corto.

Yapa, s., mosca, nombre genérico.

Yapka, s. f., tío.

Yamok, s., lobo de río, grande.

Yasik, s. f., sal (cloruro de sodio.)

Yat y sus formas eufónicas, que son : *yata, yate yatip, yatate, yalap, yating* e *yit* son prefijos que añadidos a substantivos masculinos constituyen términos de comparación. Ejemplo : *nata* es una clase de tortuga chica; *yatnata,* es una tortuga de una especie más grande. Ver *yante.*

Yata, s. f., abuelo, se repite la observación de que todos los nombres de parentesco son femeninos.

Yatahi, s. m., cabra.

Yatalesiksik, s., mesa.

Yatamahet, s., víbora acuática.

Yatamasit, s. m., quebracho (árbol.).

Yatamiktikting, s. m., ganso silvestre. Literalmente : como *miktikting.* El *miktikting* es un pato silvestre negro.

Yatamopohop, s. m., cerdo. Literalmente : *yata* = como, *mopohop* = jabalí.

Yatapahiya, s. m., ortiga. Literalmente : como los mosquitos.

Yatabebé, s. m., algodonero; hilo.

Yatebiyim, yatzbiyam, s. m., yacaré.

Yatemé, s., uruzú, planta que produce la materia colorante del comercio de este nombre; *uruzú,* la misma materia.

Yating wainkya, s. m., cacerola. Literalmente : como olla.
Yatnatzling, yatnasen, s., caballo.
Yatnatzling, apkilana o *apkilnawa,* s. f., yegua. Literalmente : caballo la hembra. Nótese que el artículo *ap* que corresponde a caballo, se pone en primer lugar en la oración, delante del substantivo secundario.
Yatnatzling apkilnowu, s. m., caballo entero. Literalmente : caballo el macho.
Yatnatzling apyankilnowu., s. m., caballo castrado. Literalmente : caballo la como yegua.
Yatzla, s. f., hermano mayor.
Yatzling, s. f., hermano o hermana menor.
Yahayi, v., girar, dar vuelta.
Yeminlakyi, adj., arisco, arisca.
Yempebik, s. f., cuero, cutis.
Yenigmen, v., abrevar, dar de beber, beber agua.
Yeschama, s., tirantillo, pequeña viga.
Yeseyi, v., mojar.
Yeptahang, s., carpincho (*Hydrochoerus capybara).*
Yetik, s. f., pescuezo,
Yiakmanghas, yahmanghas, v., vender.
Yibwatchi, adj., cóncavo; s. f., surco.
Yigmen, s. f., agua (ver *igmen.)*
Yiham apkyakhak, adj., muerto de frío.
Yiham, s. m., sur, viento del sur; frío. Se usa casi siempre con el artículo *ab : Abyiham* (ver *abyiham.)*
Yihotzmai, s. f., hechicero, doctor.
Yimanang, s. f., saliva de un macho.
Yimmaling, s. f., zorro (ver *Yammaling).*
Yimis, s. f., sudor.
Yinik, s., halcón.
Yinsansik, s. f., polvorín (guaraní : *caracha.*) Una mosquita casi microscópica, muy molesta.
Yintatzneyi.
Yintizle, adj., pesado.
Yinto, v., conducir, servir de guía, encabezar, ir adelante.
Yiño, v., tirar, disparar un arma.
Yiphenak bangetik, sobrenombre de uno que fumaba continuamente cigarros.
Yiphupaiha, s. f., nube.

Yiping, s. f., hermano mayor.
Yipmowuk, s. f., abeja, nombre genérico.
Yispuk, s. f., garganta.
Yitcheyi, adj., amarillo.
Yitneyi, adj., cargado de frutas.
Yatsine, etsine, s., mono.
Yitta, s. f., pollito de avestruz.
Yittaha, s., escorpión.
Yitzlanmopaihia, s. m., mosquitero.
Yitzlim, s., anguila.
Yitzneweyi, v., regañar.
Yitzwatzchi, adj., colorado, ruburoso.
Yoha, s. m., estrella (ver *abyoka.)* Raramente se separa el artículo *ab* (la) del substantivo *yoha,* hasta en el caso que se emplee con adjetivos numéricos. Ejemplo : *Nowokkukhà abyiham* = cuatro estrellas. Literalmente : cuatro *la* estrella.
Yowaikyi, s. f., araña.
Yowuk, s. f., muslo.

BIBLIOGRAFÍA

Morfología y biología de los protozoos, por E. FERNÁNDEZ GALIANO, 266 páginas, con 152 figuras. Calpe, Madrid, 1921 (12 pesetas).

Este compendio, bastante detallado, de protozoología dedica las primeras 100 páginas a la morfología y sistemática de las diversas clases de los protozoos, exponiendo luego con mucha extensión su fisiología (movimientos, irritación, nutrición y reproducción) para terminar con un breve capítulo general sobre parasitismo.

La obra, perfectamente moderna, pues en todos sus capítulos recurre a las investigaciones de los últimos años, está dedicada en primer lugar a la protozoología pura, no aplicada, y aunque contenga de vez en cuando algún dato parasitológico o clínico de interés general, no es, ni quiere ser, un texto de parasitología o de medicina tropical. Sin embargo, dada la importancia fundamental que los protozoarios patógenos han adquirido para la medicina, y en vista de que no es posible formarse una idea adecuada de éstos, sin conocer la morfología y biología de las formas libres, es de esperar que el libro del profesor Fernández Galiano sea utilizado no sólo por zoólogos, sino también por médicos deseosos de información científica general sobre los objetos de sus estudios La obra será, ante todo, de utilidad para aquellos que, debido a dificultades de lenguaje, no pueden leer con facilidad los grandes tratados alemanes e ingleses, respecto a los que posee además la ventaja de prestar la atención debida a los hechos hallados por investigadores españoles.

Me parece que el trabajo hubiera ganado en utilidad, agregándole su autor un índice siquiera de los principales trabajos originales. En vista de que el libro se usará, ante todo, en laboratorios pobremente dotados, también en cuanto a biblioteca, como lo son los sudamericanos y lo serán los españoles, buenas indicaciones bibliográficas habrían sido tanto más necesarias. Aun la pequeña lista de obras para la orientación general (pág. 4) es bastaute deficiente. En ella faltan por ejemplo los dos tomos sobre protozoarios del *Treatise of Zoology*, editado por E. Ray Lankester (por varios autores, 296 y 451 pág. Londres, 1903 y 1909) y la nueva edición de Lang-Luehe (tomo I del *Handbuch der Morphologie der wirbellosen Tiere*, editado por A. Lang., Jena, 1913 - 1921).

También en las figuras, que, aunque ejecutadas ex profeso para el libro, pare-

cen ser, en su mayoría, esquematizaciones de figuras seleccionadas de otras obras, la indicación de la procedencia hubiera sido de utilidad para la orientación del lector. Tampoco su ejecución se halla a la altura de las obras modernas, por ejemplo, de la arriba mencionada de Lang-Luehe o de Doflein, aunque basten en general para ayudar a la compresión del texto.

Las deficiencias anotadas no son, sin embargo, de mayor peso y la obra debiera existir en todos los laboratorios de zoología científica y de parasitología de habla castellana:

M. FERNÁNDEZ.

Física general (tomo I. *Mecánica del cuerpo rígido. Gravitación. Estática de la elasticidad de los sólidos*, por el doctor RAMÓN G. LOYARTE, La Plata).

El distinguido profesor titular de física general de la Universidad nacional de La Plata, doctor Ramón G. Loyarte, ha dado a la publicidad un interesante volumen de física general.

El primer tomo de dicha obra se refiere a la mecánica del cuerpo rígido, gravitación y estática de la elasticidad de los sólidos, capítulos extensamente tratados que requieren el conocimiento de principios de cálculo diferencial e integral, pues aparecen en varias partes ecuaciones diferenciales lineales de primer y segundo orden a coeficientes constantes, lo que da a la obra un carácter científico de un nivel superior al de las obras de los mismos cursos que actualmente se dictan en las universidades del país y aun del extranjero.

Es lamentable la enseñanza de la física actualmeute, pues, a la par de ser elemental, no se le da el carácter práctico que realmente requiere, para más tarde sacar provecho de todos esos conceptos de tan útil aplicación.

Felizmente, la obra del doctor Loyarte llena ampliamente ese vacío y satisface las necesidades de la verdadera escuela de la física.

La forma en que el autor ha encarado el estudio de los tantos fenómenos, muchos de ellos de suma importancia en las aplicaciones, por ejemplo : la teoría del giróscopo en su aplicación a la dirección de los torpedos, a la brújula giroscópica, etc., revelan un conocimiento profundo y fácil manejo del dominio de todas aquellas nociones de capital importancia para el físico, para el químico y para el ingeniero.

Todos los capítulos han sido desarrollados con clara exposición, acompañando las comprobaciones experimentales, realizables mediante disposiciones originales y efectivas en el laboratorio.

En el capítulo I hace un breve comentario sobre algunos conceptos fundamentales, definiendo con precisión las unidades de espacio y tiempo.

El capítulo II se refiere a la estática y sus aplicaciones, estudiando en los capítulos III y IV la dinámica del punto.

En el capítulo V estudia las « unidades », para luego entrar a considerar el trabajo, energía cinética, conservación de la energía y principios fundamentales de la estática.

Los capítulos VIII y IX se refieren a los movimientos curvilíneos, oscilaciones, rotaciones, momentos de inercia, fuerza y momentos centrífugos, ejes libres.

En los capítulos X y XI estudia el movimiento del centro de gravedad y elementos de cinemática del cuerpo rígido.

El capítulo XII, muy interesante, se refiere a la dinámica del movimiento de un cuerpo rígido al rededor de un punto y elementos de la teoría del giróscopo y sus aplicaciones.

Análogamente el capítulo XIII trae elementos de la teoría del movimiento relativo y sus diversas aplicaciones.

Por último, en los tres capítulos restantes expone la aceleración de la gravedad, gravitación, balanzas de precisión, elasticidad, flexión de barras, suspensiones y elementos de la teoría del choque.

Como puede verse, el primer tomo es muy completo, lo cual hace prever que los cuatro próximos tomos, a aparecer, serán desarrollados en forma análoga, con lo cual se habrá dado a la publicidad una excelente obra de física general muy valiosa por todos conceptos.

M. U.

Momento actual de la física. Publicación de la Real academia de Ciencias exactas, físicas y naturales (Madrid). Discurso leído por el doctor Blas Cabrera.

En la sesión inaugural del curso académico de 1921-22 el eminente físico español Blas Cabrera desarrolló en forma clara y concisa las ideas y doctrinas de la evolución de la física. El disertante expresó que estas doctrinas lejos de constituir un capítulo aparte, son hijas directas de muchas otras vertidas en el siglo pasado.

Así el siglo XIX terminó sus gloriosos días elaborando un concepto de la filosofía natural, cuyos orígenes es necesario buscar en la geometría de Euclides y en la mecánica de Newton, molde en que nuestros progenitores aspiraban a vaciar todo el contenido de la ciencia.

La noción estrecha de los postulados creados por aquella escuela, denuncia un falso concepto del valor de la ciencia, pues en él va contenido implícitamente la convicción de que la naturaleza se nos manifiesta con la plena exhibición de sus recursos.

El pensamiento científico de nuestros días ha roto más de una vez contra esa consagración de los principios inmutables y como muy bien lo expresa el doctor Blas Cabrera, la ciencia necesita una modificación profunda que aún no es posible precisar, no obstante lo cual puede afirmarse que se ha de apoyar en la modificación de esos principios que con pretendida validez universal estableció la ciencia clásica.

Al referirse a la pretendida imposibilidad de descorrer el velo que cubre el secreto de las intimidades de los fenómenos que percibimos añade :

« Pocas leyes tan simples, de percepción tan inmediata y formulación tan clara como las que para los gases obtuvieron empíricamente Mariotte y Gay Lussac, relacionando magnitudes que como la presión, el volumen y la temperatura se nos muestra sin ningún misterio.

« En contraposición a esta claridad y sencillez, la teoría cinética admite que los fenómenos observados ocultan un mundo complexísimo, constituído por un número fabuloso de cuerpos rígidos e independientes (moléculas) en movimientos desordenados.

« Este brutal contraste entre la simplicidad de las leyes empíricas fundamentales y la complexidad del mecanismo que tras ellos se oculta, según las teorías

cinéticas se ofreció con bastante fuerza a aquellos espíritus enunciados de la elegancia de construcción de la geometría, la mecánica y la energética, para no dejarles percibir estas ventajas posteriores, ni aun la claridad y sencillez que sobre las leyes de la química arroja la doctrina atómica. »

Después de referirse al descubrimiento de lás leyes de Coulomb para las acciones eléctricas y magnéticas, la teoría electro-magnética de la luz de Maxwell, el éter eléctrico de Watson, la ley periódica de Mendeleeff, el *quantum* de Planck, y la hipótesis de Prout, termina su interesantísima disertación con estas palabras :

« El *electrón, protón y quantum,* las últimas realidades en que la naturaleza se descompone, permanecen sumidas en el misterio, no obstante la innegable existencia de estas entidades.

M. U.

ÍNDICE GENERAL

DE LAS

MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO NONAGÉSIMOTERCERO

BIBLIOGRAFÍA